

RESONADORES DE HELMHOLTZ DE BOCA RECTANGULAR Y CUELLO DE LONGITUD PEQUEÑA

PACS: 43.20.Ks

Rossell Turull, Ivana; Soler Rocasalbas, Sergi; Vila Deutschbein, Carlos
Enginyeria i Arquitectura La Salle, Departamento de Acústica. Universidad Ramon Llull
Paseo Bonanova, 8
08022 Barcelona. España
Tel: 932 902 476
Fax: 932 901 470
E-Mail: ivana@salleurl.edu; ssoler@salleurl.edu; cvila@salleurl.edu

ABSTRACT

A theoretical review about Helmholtz resonators will be made at the beginning of this paper. Our goal is fitting the resonance frequency equation to rectangular mouth resonators with short neck length. Measurements made on 20 prototypes will be presented in order to obtain an empirical equation. This project is a preliminary part of a musical instrument design project.

RESUMEN

Al inicio de este artículo se presentará una revisión teórica acerca de los resonadores de Helmholtz. Nuestro objetivo es adecuar la ecuación de la frecuencia de resonancia para resonadores de boca rectangular y cuello de longitud muy pequeña. Se presentarán los resultados de las medidas sobre 20 prototipos intentando llegar a una formulación empírica que acerque la previsión con la realidad. Este estudio es parte de un proyecto de diseño de un peculiar instrumento musical.

1. EL RESONADOR DE HELMHOLTZ: INTRODUCCIÓN TEÓRICA

El resonador de Helmholtz consiste en una cavidad rígida de volumen V que comunica al exterior a través de un cuello de longitud L y sección S . Si se cumple que la longitud de onda (λ) es superior a L ($\lambda \gg L$) el fluido del cuello se moverá como una unidad, constituyendo el elemento de *masa*. Si $\lambda \gg V^{1/3}$, la presión acústica dentro de la cavidad proporcionará el elemento de *rigidez*. Si $\lambda \gg S^{1/2}$, la apertura radiará sonido como una fuente simple y por lo tanto será el elemento de *resistencia*. En el cuello se dan pérdidas de tipo viscoso, adicionales, pero para cuellos de diámetro mayor a 1cm, estas pérdidas son, en general, menores que las asociadas con la radiación y pueden ignorarse.

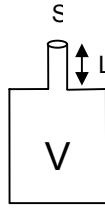


Figura 1: Esquema de un resonador de Helmholtz

A continuación se analizará el resonador de Helmholtz a partir de su equivalente mecánico como sistema masa-muelle-resistencia:

1.1 El Elemento de Masa:

El fluido de la masa del cuello tiene una masa efectiva total:

$$m = \rho_0 S L'$$

L' es la longitud efectiva del cuello, mayor a la longitud física debido a la carga de su masa de radiación. Veamos a continuación el desarrollo teórico para la obtención de la longitud efectiva.

1.2 Longitud Efectiva del Cuello; Corrección de Extremo:

El término conocido como corrección de extremo nos lleva a corregir el valor de la longitud física del cuello de un resonador en función del radio. A continuación exponemos el origen de esta corrección:

Partiendo del estudio de la impedancia de radiación de un pistón circular de radio a , en pantalla, válida para baja frecuencia ($Ka \ll 1$), obtenemos las expresiones aproximadas de la resistencia de radiación y reactancia de radiación:

$$R_r = \frac{1}{2} \pi a^2 \rho_0 c (Ka)^2 \quad X_r = \pi a^2 \rho_0 c \frac{8}{3\pi} (Ka)$$

La reactancia, a bajas frecuencias, es similar a la de una masa de valor:

$$m_r = \frac{X_r}{\omega} = \pi a^2 \rho_0 \frac{8a}{3\pi} = S \rho_0 L'$$

de esta forma se aprecia como si el pistón estuviera cargado con un volumen cilíndrico de fluido de área de sección transversal igual a la del pistón y longitud o altura efectiva igual a $\frac{8a}{3\pi} \approx 0.85a$.

Cuando $Ka \gg 1$ la impedancia resulta: $Z_r = \pi a^2 \rho_0 c$, simplemente resulta el área por la impedancia del aire.

Por lo tanto, para el caso del resonador, el aire que se mueve como un bloque dentro del cuello va a presentar una longitud efectiva, en caso que termine con una pestaña (considerable en comparación con la longitud de onda del sonido), aumentada respecto a la longitud física por el término $0,85a$. La pestaña representa el efecto de la pantalla considerada en la formulación de la impedancia de radiación anterior. Si la terminación tiene pestaña en ambos lados, se usará el término corrector para cada extremo.

Para el caso de terminación sin pestaña, tubo abierto, la impedancia de radiación es aproximadamente:

$$\frac{Z_r}{\rho_0 c S} = \frac{Z_{mL}}{\rho_0 c S} = \frac{1}{4}(Ka)^2 + j0,61Ka$$

En consecuencia, la corrección de extremo para un tubo abierto sin pestaña es 0,6a.

1.3 El elemento de rigidez:

Al considerar la masa de aire del cuello como un pistón que sella el volumen interior, los movimientos del pistón (ξ) provocan cambios del volumen de la cavidad ($\Delta V = -S\xi$), a partir de la condensación s :

$$s = \frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\Delta V}{V} = \frac{S\xi}{V},$$

sabiendo:

$$p = \rho_0 c^2 s = \frac{\rho_0 c^2 S}{V} \xi$$

La fuerza $f = pS$ requerida para mantener el desplazamiento es: $F = \frac{\rho_0 c^2 S^2}{V} \xi$ y,

por tanto, la rigidez efectiva: $K = \frac{\rho_0 c^2 S^2}{V}$

1.4 El elemento de resistencia:

El fluido que se mueve en el cuello radia sonido en el medio circundante de la misma forma que el tubo con el extremo abierto. Para $\lambda \gg a$, la resistencia de radiación, (vista en el apartado anterior) es:

$$R_r = \rho_0 c \frac{K^2 S^2}{2\pi} (\text{pestaña}) \quad R_r = \rho_0 c \frac{K^2 S^2}{4\pi} (\text{sin pestaña})$$

1.5 La frecuencia de resonancia:

Cuando una onda sonora de amplitud P , con fuerza $P \cdot S$, incide sobre el resonador, la ecuación diferencial resultante para el desplazamiento (hacia dentro) del fluido del cuello es:

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} + R_r \frac{d\xi}{dt} + K\xi = SP e^{j\omega t}$$

Esta es la ecuación de un oscilador forzado, por analogía, la impedancia de un resonador de Helmholtz es:

$$Z_m = R_r + j\left(\omega m - \frac{K}{\omega}\right)$$

Así pues, la frecuencia de resonancia, dada en la condición de reactancia cero es:

$$\omega_0 = c \sqrt{\frac{S}{L'V}}$$

Como puede apreciarse, la frecuencia de resonancia no depende de la forma de la cavidad del resonador. Mientras las dimensiones del resonador sea menores a la longitud de onda y la apertura no sea muy grande, la frecuencia viene determinada por el cociente $\frac{S}{L'V}$.

Es conveniente remarcar que esta formulación sirve para un resonador de sección de apertura circular, determinada por el radio a . Cuando la boca del resonador no es circular se suele trabajar con el radio equivalente a la sección dada. Veremos más adelante la importancia de este punto en el caso de trabajar con resonadores de bocas no circulares. La bibliografía general no aporta datos teóricos para adaptar la ecuación teórica al comportamiento real en estos casos y el valor del radio equivalente no es del todo adecuado.

1.6 Selectividad del resonador de Helmholtz:

La agudeza de la resonancia, es decir, la Q del resonador se obtiene a partir del valor de la resistencia de radiación, suponiendo, como se ha comentado anteriormente, sólo pérdidas por radiación acústica (con terminación con pestaña):

$$Q = \omega_0 m / R_r = 2\pi \sqrt{V(L/S)^3}$$

2. ESTUDIO EXPERIMENTAL

El objetivo de este estudio es obtener información experimental para valorar con el máximo rigor posible la importancia de la forma de la boca de un resonador a efectos de su frecuencia de resonancia.

La forma de la boca (cuando no es circular) afecta a la corrección de extremo en cuanto esta se basa en un radio equivalente y no real. El valor de corrección tiene un peso muy importante para los casos en que la longitud física del cuello es muy pequeña. A continuación veremos qué ocurre en determinados casos e intentaremos extraer alguna conclusión al comportamiento analizado.

2.1 Medidas realizadas:

Para realizar las medidas se contó con 20 prototipos de resonadores. Por un lado, partiendo de una cavidad rectangular, se construyeron 11 tapas que incluían variedad de formas de bocas y grosores. Además se midieron otro tipo de resonadores de cavidad cilíndrica y boca también rectangular.

La metodología de medida se basaba en excitar el resonador con ruido rosa con incidencia perpendicular a la boca. Se procedía a medir en el interior de la cavidad con un micrófono de condensador de ¼ de pulgada. Se controló el efecto del micrófono y el cable así como otros parámetros tales como la temperatura o el ventaneado del analizador espectral.

2.2 Resonadores de cavidad rectangular:

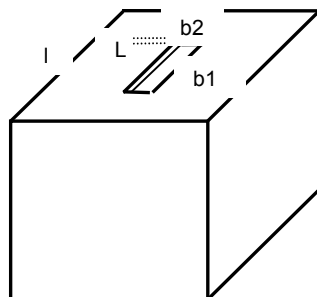


Figura 2: Parámetros que definen nuestro Resonador de Helmholtz

A continuación mostramos una tabla de valores donde se caracterizan los diferentes prototipos usados en la primera fase del estudio empírico:

Prototipos boca rectangular	1	2	3	4	5
Boca: lado b1 (cm)	8,90	5,00	9,00	6,00	7,25
Boca: lado b2 (cm)	2,00	5,00	2,10	0,70	0,95
Sección boca (m2)	1,780E-03	2,500E-03	1,890E-03	4,200E-04	6,888E-04
Altura cavidad (cm)	28,0	28,0	28,0	28,0	28,0
Longitud Cavidad	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0
Profund. Cavidad (cm)	19,1	19,1	19,1	19,1	19,1
Longitud Cuello (L) (cm)	1,00	1,00	1,90	1,90	1,90
Volumen (m3)	1,177E-02	1,177E-02	1,177E-02	1,177E-02	1,177E-02

6	7	8	9	10
8,90	7,20	6,00	8,00	8,00
1,90	1,00	0,75	1,10	1,10
1,691E-03	7,200E-04	4,500E-04	8,800E-04	8,800E-04
28,0	28,0	28,0	28,0	28,0
22,0	22,0	22,0	22,0	22,0
19,1	19,1	19,1	19,1	19,1
0,25	0,20	0,35	1,60	1,60
1,177E-02	1,177E-02	1,177E-02	1,177E-02	1,177E-02

Los cálculos se realizan según corrección con pestaña en ambos extremos del cuello. Por lo tanto usaremos una corrección de 1,7 veces el radio equivalente. También se usa, a priori, el valor del radio equivalente a una sección circular.

La temperatura ambiental a la que se realizaron las medidas era, en todos los casos, de 26°. El prototipo 7 se descartó por imperfecciones de construcción.

Presentaremos los resultados de las frecuencias calculadas y las frecuencias medidas, acompañados de parámetros importantes para las conclusiones de los mismos:

Parámetros de control:

- **Ka**: Este término representa la condición de fidelidad de la formulación (premisa de partida de la teoría). Debe ser bastante inferior a la unidad.
- **l/b1**: Este valor nos indica la magnitud de la ranura rectangular respecto la dimensión de la cavidad en su dirección. Nos dará información de la dimensión de la boca.
- **L/δ (%)**: El término δ es el valor de la corrección de extremo mientras que L es la longitud física del cuello sin corregir. Este parámetro nos cuantificará el peso de la corrección de extremo. Valores pequeños nos indicarán que la longitud del cuello (grosor de la tapa del resonador) es casi menoscupible y, por tanto, el valor de la corrección cobra una importancia elevada.
- **b1/b2**: Este es un parámetro de forma. Nos indica cuán alargada es la boca del resonador, por lo tanto, nos puede indicar la magnitud de error al usar el valor del radio equivalente.

Los resultados obtenidos son:

Prototipos	1	2	3	4	5
Ka	0,04	0,05	0,04	0,01	0,02
l/b1	2,47	4,40	2,44	3,67	3,03
L / δ (%)	24,71	20,85	45,57	96,66	75,48
b1/b2	4,45	1,00	4,29	8,57	7,63
fres. calculada	95,62	105,75	89,84	53,07	63,58
fres. medida	100	105,5	95,5	53,75	63,5

	6	8	9	10	11
Ka	0,04	0,02	0,02	0,02	0,02
l/b1	2,47	3,67	2,75	2,75	2,75
L / δ (%)	6,34	17,20	56,23	56,23	14,74
b1/b2	4,68	8,00	7,27	7,27	8,00
fres. calculada	102,23	69,94	71,64	71,64	81,62
fres. medida	104	77	73	74,5	93

A partir de estos primeros resultados podemos extraer algunas conclusiones preliminares:

Los resonadores **2, 4 y 5** han dado muy buen resultado. Analizando sus características respecto la de los demás podemos suponer algunas razones:

El resonador 2 es un resonador de boca cuadrada. El cálculo del radio equivalente para simular el comportamiento de pistón circular en pantalla no supone una aproximación demasiado atrevida. De los resultados obtenidos se concluye que para este caso, el valor teórico de corrección de extremo calculado sobre el radio equivalente, se ajusta a la realidad.

Los resonadores 4 y 5 son similares. Ambos están sintonizados a frecuencias muy bajas, por lo que presentan el término Ka bajos. En ambos casos estamos frente a una situación en la que la corrección de extremos cobra una importancia igual a la del cuello (valores de L/δ superiores al 75%), De esta forma, el error que implique el valor de la corrección no será tan determinante en la frecuencia calculada. El dimensionado de la ranura está cercano a un tercio respecto la dimensión de la tapa. el término $b1/b2$ es elevado, es decir, la forma es bastante alargada.

Los resonadores 6 y 8 no son muy representativos. Su construcción fue más complicada y presentan algunas irregularidades. Posteriormente a estos resultados se hicieron otros 4 resonadores de longitud de cuello pequeña (3 y 4 mm) sin irregularidad de construcción. En este caso, a partir de un resonador de boca circular se ajustó la constante de corrección de extremo igual a 1,65. Esta constante, aplicada a los casos anteriores y a los nuevos resonadores mejoraba notablemente la previsión de la resonancia en todos los casos excepto en el caso de boca cuadrada. Este resultado nos lleva a un estudio más profundo en un futuro.

2.3 Resonadores de cavidad cilíndrica:

Se construyeron otro tipo de resonadores basados en cavidades cilíndricas. Se midieron resonadores con bocas rectangulares y circulares y, en ambos casos, los resultados empíricos difirieron ligeramente de los previstos. Para el caso de las bocas rectangulares se llegó a la conclusión de que a partir de una corrección con pestaña en ambos extremos, debería corregirse el valor del radio equivalente a un 75%. En los 4 casos probados esta corrección funcionó bastante bien. Para los prototipos de bocas circulares los resultados medidos no se ajustaron a la previsión de la formulación. Deben probarse más prototipos y estudiar el efecto cilíndrico de la cavidad en su función de pestaña o pantalla.

3. CONCLUSIONES

Gracias a este estudio hemos podido comprobar la dificultad de controlar rigurosamente la frecuencia de resonancia de estos sistemas cuando nos alejamos de las premisas de partida teóricas, es decir, cuando la forma física del resonador se alejan de la supuesta en la formulación. Las medidas adjuntadas sufren de una incertidumbre que puede ser provocada por diferentes factores: defectos de construcción, efecto del micrófono, temperatura, colocación del micrófono y efecto del entorno, aunque hemos intentado minimizarlas al máximo.

Actualmente seguimos trabajando salvando posibles fuentes de error. Ciertamente, nuestro objeto de estudio no está contemplado en fuentes teóricas ni encontrado en la bibliografía general. El valor de la corrección de extremo cuando la longitud física del cuello es tan pequeña y el hecho de usar un radio equivalente para adaptar el comportamiento a un pistón circular, conllevan desviaciones entre la teoría y la práctica que, por el momento, salvamos a partir de correcciones empíricas. Estas correcciones son válidas para ciertos casos pero deben validarse en un sentido más amplio.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Kinsler, Frey, Coppens, y Sanders, *Fundamentos de Acústica*. John Wiley & Sons
H. Arau, *ABC de la Acústica Arquitectónica*, Ediciones CEAC
M.L Munjal, *Acoustics of Ducts and Mufflers*. John Wiley & Sons