



FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIACUSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

## EMPLEO DE LENTES FRACTALES BASADAS EN SECUENCIAS BINARIAS DE CANTOR PARA FOCALIZACIÓN DE ULTRASONIDOS

PACS: 43.58.Ls.

Pérez-López, Sergio<sup>1</sup>; Tarrazó-Serrano, Daniel<sup>1</sup>; Fuster, José Miguel<sup>2</sup>; Candelas, Pilar<sup>1,3</sup>; Rubio, Constanza<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Centro de Tecnologías Físicas, Universitat Politècnica de València, Camí de Vera s/n, 46022, València, Spain

<sup>2</sup>Departamento de Comunicaciones, Universitat Politècnica de València, Camí de Vera s/n, 46022, València, Spain

<sup>3</sup>Departamento de Física Aplicada, Universitat Politècnica de València, Camí de Vera s/n, 46022, València, Spain

E-Mail: [serpelo1@upv.es](mailto:serpelo1@upv.es), [dtarrazo@fis.upv.es](mailto:dtarrazo@fis.upv.es), [jfuster@com.upv.es](mailto:jfuster@com.upv.es), [pcandelas@fis.upv.es](mailto:pcandelas@fis.upv.es), [crubiom@fis.upv.es](mailto:crubiom@fis.upv.es)

**Palabras Clave:** Fractal Zone Plates, Cantor, Fresnel Zone Plates, Focalización, Ultrasonidos

### ABSTRACT

Fresnel lenses are widely used in many areas of physics, such as optics, microwaves or acoustics. Recently, new types of lenses based on conventional Fresnel Zone Plates have been proposed for optical applications. Among them, lenses based on Cantor fractal binary sequences should be highlighted for their interesting properties of self-similarity and its multifocal profile. In this work, a theoretical analysis of this type of lenses has been developed. Moreover, experimental measurements have been done, and they prove that Cantor lenses can be used in the ultrasounds field.

### RESUMEN

Las lentes de Fresnel son ampliamente utilizadas en muchos ámbitos de la física, tales como óptica, microondas o acústica. Recientemente, nuevos tipos de lentes basadas en las de Fresnel han sido propuestas para su empleo en el campo de la óptica. Entre ellas, las lentes basadas en secuencias binarias de Cantor destacan por sus interesantes propiedades de autosemejanza y su perfil multifocal. Este trabajo presenta un análisis teórico de este tipo de lentes, así como resultados experimentales que muestran que su empleo es posible en el campo de los ultrasonidos.

### INTRODUCCIÓN

La focalización de ondas es un área de estudio de gran interés en diversos campos de la física, tales como óptica [1], microondas [2], rayos X [3] o acústica [4,5]. Entre los distintos tipos de lentes disponibles para focalizar, las lentes de Fresnel (*Fresnel Zone Plates*, FZPs) destacan por su facilidad de fabricación en comparación con las lentes cóncavas y convexas empleadas tradicionalmente. Las FZPs consisten en un conjunto de anillos concéntricos, siendo cada uno de ellos una región de Fresnel. La anchura de cada anillo depende de diversos parámetros, tales como la distancia focal y la longitud de onda. Dependiendo del modo de implementación de cada una de las regiones, existen dos tipos de FZP. Las FZPs de tipo Soret [6] alternan zonas de bloqueo de la presión con zonas transparentes, mientras que las FZPs de tipo Rayleigh-Wood [7,8] reemplazan las zonas de bloqueo con zonas de cambio de fase.

En los últimos años, se han presentado en el campo de la óptica nuevos tipos de lentes basadas en las FZP que amplían las posibilidades de focalización de este tipo de lentes. Entre ellas destacan las lentes basadas en secuencias binarias de Fibonacci [9], [10], que producen perfiles bifocales con igual intensidad en ambos focos; y las lentes basadas en secuencias binarias de fractales de Cantor [11-13], que presentan propiedades interesantes de autosemenjanza y un perfil con múltiples focos. En el campo de la acústica, también se han presentado lentes basadas en estructuras prefractales de Cantor [14] con el objetivo de focalización y modulación del haz generado por la lente.

En este trabajo se presenta el proceso de diseño de las lentes de Cantor, así como un análisis teórico de sus propiedades de focalización realizado mediante simulaciones basadas en métodos de cálculo numéricos. Además, para contrastar el resultado obtenido mediante simulaciones, se han realizado medidas experimentales en inmersión, demostrando que este tipo de lentes pueden ser empleadas para focalización en el campo de los ultrasonidos.

## ANÁLISIS TEÓRICO

### Diseño de lentes de Cantor

Como se ha mencionado anteriormente, el diseño de las lentes de Cantor está basado en las lentes de Fresnel. De este modo, cuando se considera onda plana, los distintos radios de las regiones de Fresnel pueden calcularse como

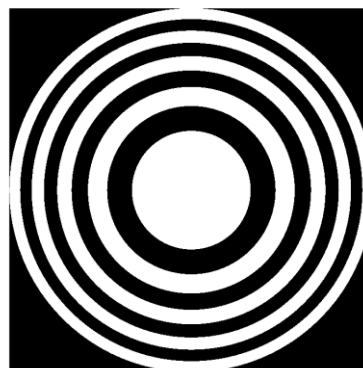
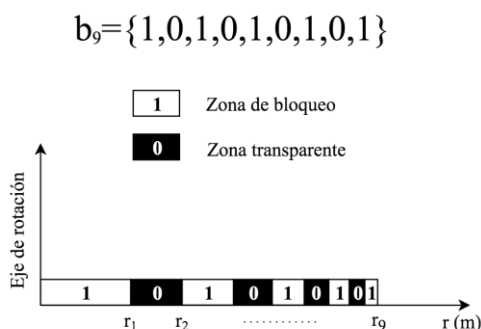
$$r_n = \sqrt{n\lambda F + \left(\frac{n\lambda}{2}\right)^2}, \quad (1)$$

donde  $F$  representa la distancia focal,  $\lambda$  la longitud de onda de trabajo,  $r_n$  es el  $n$ -ésimo de Fresnel y  $n = 1, 2, \dots, N$ , siendo  $N$  el número total de regiones de Fresnel.

Una vez que se han calculado los distintos radios de Fresnel, se pueden obtener diferentes tipos de lente aplicado una máscara binaria. Por ejemplo, una secuencia periódica de "1" y "0" de longitud  $N$  aplicada sobre las diferentes regiones de Fresnel genera una FZP de  $N$  regiones. En la Figura 1(a) puede verse un ejemplo de diseño para una secuencia periódica de longitud  $N = 9$ . En función del tipo de implementación de la FZP, las regiones tipo "1" y las regiones tipo "0" representan diferentes opciones de fabricación. Para una lente tipo Soret, las regiones tipo

“1” representan zonas de bloqueo de presión, mientras que las regiones tipo “0” representan zonas transparentes, o viceversa.

(a)



(b)

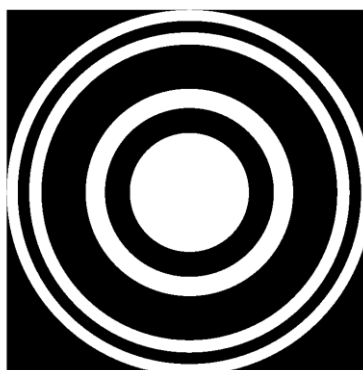
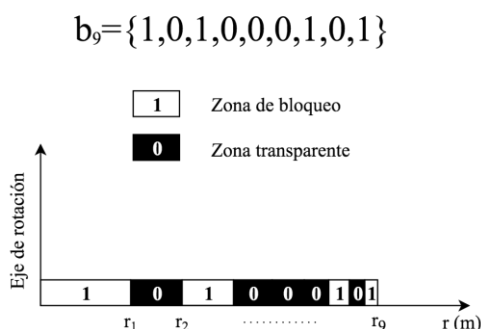


Figura 1: Ejemplo de diseño de lentes a partir de secuencias binarias: (a) FZP diseñada a partir de una secuencia periódica de longitud  $N = 9$  y (b) lente de Cantor para una secuencia generada con  $D = 2$  y  $S = 2$ .

Dependiendo de la naturaleza de la secuencia binaria se pueden obtener diferentes tipos de lentes. La lente de Cantor se obtiene al aplicar una máscara binaria basada en fractales de Cantor sobre las diferentes regiones de Fresnel. Para generar la secuencia binaria de Cantor se parte de una etapa inicial ( $S = 0$ ) que se divide en  $2D - 1$  segmentos, siendo  $D$  segmentos del tipo “1” y  $D - 1$  del tipo “0”. En las siguientes etapas, los segmentos tipo “1” se sustituyen por la secuencia binaria de la etapa anterior, mientras que los segmentos tipo “0” se sustituyen por una secuencia de “0” de la misma longitud que la secuencia de la etapa anterior. En la Tabla 1 puede observarse un ejemplo para dos configuraciones diferentes con  $D = 2$  y  $D = 3$ , para las dos primeros etapas. En la tabla,  $N$  representa la longitud de la secuencia binaria, que puede calcularse como  $N = (2D - 1)^S$ .

$D$	$S$	Secuencia binaria	$N$
2	1	{1,0,1}	3
	2	{1,0,1,0,0,0,1,0,1}	9
3	1	{1,0,1,0,1}	5
	2	{1,0,1,0,1,0,0,0,0,0,1,0,1,0,1,0,0,0,0,0,1,0,1,0,1}	25

Tabla 1: Secuencias binarias de Cantor para  $D = 2$  y  $D = 3$  en las dos primeros etapas.

De este modo, una vez calculada la secuencia binaria, se calculan los  $N = (2D - 1)^2$  radios de las regiones de Fresnel empleando la Ecuación (1) y, posteriormente, se aplica la secuencia binaria sobre dichas regiones para obtener la lente de Cantor. En la Figura 1(b) puede observarse un ejemplo de diseño para una secuencia de Cantor de  $D = 2$  y  $S = 2$ .

### Propiedades de focalización

Para analizar las propiedades de focalización, se ha calculado numéricamente la intensidad acústica generada por la lente en la dirección longitudinal empleando la difracción de Fresnel [15]:

$$I(z) = k^2 \left| \int_0^a q(r) p_0(r) \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} e^{-jk\sqrt{r^2+z^2}} dr \right|^2, \quad (2)$$

donde  $k = 2\pi/\lambda$  es el número de onda,  $z$  es la dirección longitudinal a la lente,  $a$  es el radio máximo de la lente,  $q(r)$  es la función pupila que describe la geometría de la lente y  $p_0(r)$  es la presión acústica incidente, siendo  $r$  el eje radial de la lente. La función pupila valdrá 1 en las regiones transparentes, mientras que en las regiones de bloqueo de presión valdrá 0. En el caso de onda plana,  $p_0(r)$  es constante, por lo que no afecta al resultado de la integral.

La Figura 2 muestra los perfiles de focalización normalizados al máximo de tres lentes de Cantor con diferentes valores de  $D$ , para una etapa  $S = 2$ . La longitud de onda de trabajo es  $\lambda = 0.15$  mm y la distancia focal escogida es  $F = 200$  mm. La línea azul representa el perfil correspondiente a la lente de Cantor, mientras que la línea roja se corresponde con la lente FZP asociada con  $N = (2D - 1)^S$  regiones de Fresnel. Como se puede apreciar, la lente de Cantor tiene el foco principal a la misma distancia que su lente FZP asociada, pero a diferencia de ésta la lente de Cantor presenta lóbulos secundarios de mayor nivel adyacentes al lóbulo principal. La resolución longitudinal de ambas lentes, que viene fijada por la distancia a la que la intensidad se reduce a la mitad de su valor máximo (*Full Length Half Maximum*, FLHM), es prácticamente idéntica. Otra característica importante que se puede observar en las Figuras 2(d), 2(e) y 2(f) es que a medida que aumenta  $D$ , los focos secundarios de la lente se sitúan más próximos al lóbulo principal.

Para analizar la influencia de aumentar el número de etapas de la secuencia binaria de Cantor, se han realizado simulaciones para lentes con  $D = 2$  en tres etapas consecutivas  $S = 2$ ,  $S = 3$  y  $S = 4$ . La Figura 3 muestra los perfiles de focalización obtenidos, siendo la línea azul el perfil correspondiente a  $S = 2$ , la línea roja el perfil correspondiente a  $S = 3$  y la línea negra el perfil correspondiente a  $S = 4$ . La longitud de onda y la distancia focal consideradas son las mismas que en el caso de la Figura 2. Como se puede apreciar, el perfil de una determinada etapa contiene los perfiles de las etapas anteriores. De este modo, el perfil con  $S = 3$  contiene en cada uno de sus lóbulos el perfil obtenido en  $S = 2$ , y el mismo fenómeno se repite para  $S = 4$ . Esta característica se denomina autosemejanza, y se produce como consecuencia de la naturaleza fractal de la lente de Cantor, que se ve replicada en el perfil de focalización generado.

Las lentes de Cantor presentan perfiles con un foco principal y múltiples focos secundarios. Dado que el proceso de diseño de este tipo de lentes está basado en una FZP convencional, se pueden emplear las mismas técnicas de fabricación para ambos tipos de lentes.

FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIACUSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

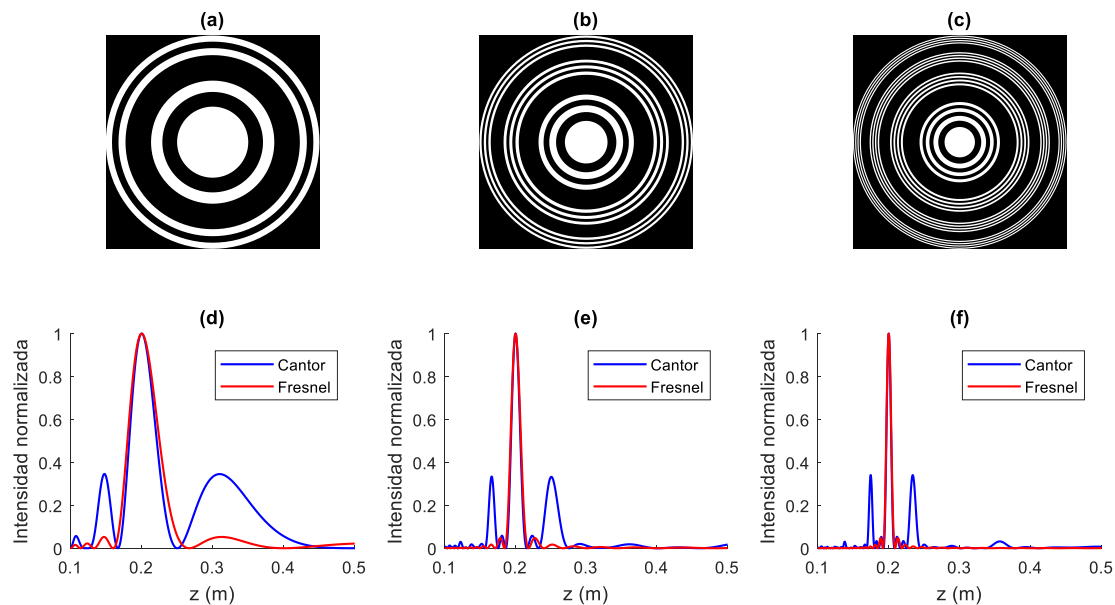


Figura 2: Perfiles de focalización de las lentes de Cantor: (a) diseño para ( $D = 2, S = 2$ ) y (d) resultado; (b) diseño para ( $D = 3, S = 2$ ) y (e) resultado; (c) diseño para ( $D = 4, S = 2$ ) y (f) resultado. Cada perfil está normalizado respecto a su valor máximo.

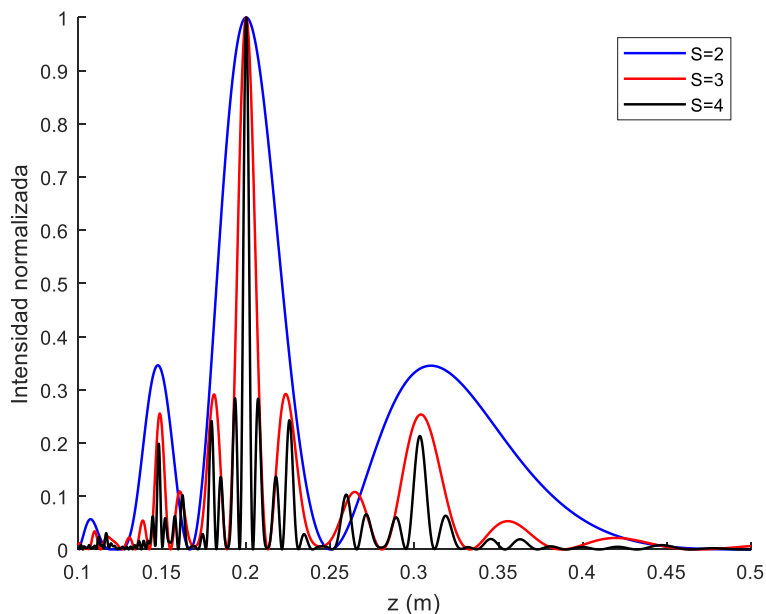


Figura 3: Perfiles de focalización para una lente de Cantor con  $D = 2$ :  $S = 2$  (línea azul),  $S = 3$  (línea roja) y  $S = 4$  (línea negra).

## RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para probar el funcionamiento de este tipo de lentes en el campo de los ultrasonidos, se han llevado a cabo medidas experimentales. El montaje experimental [16] consiste en un sistema automatizado de medida con una resolución espacial de  $1 \times 1 \times 1 \text{ mm}^3$ . Las medidas se han realizado en inmersión, empleando un tanque lleno de agua destilada. El transmisor es un transductor del tipo pistón con una frecuencia central de 1 MHz y un diámetro activo de 12.7 mm, del fabricante Inmasonic. La señal transmitida es generada con un generador de pulsos 5077PR de Panametrics. Finalmente, la señal se recibe con un hidrófono de Precision Acoustics y se digitaliza empleando un osciloscopio digital de PicoScope.

Se han fabricado dos lentes de Cantor tipo Soret. El material empleado para la fabricación de las regiones de bloqueo de presión es el latón, debido a que presenta un elevado contraste de impedancias con el agua. La frecuencia de diseño es 1 MHz y la distancia focal es  $F = 50 \text{ mm}$ . El número de divisiones escogido es  $D = 2$  y la etapa es  $S = 2$ . La velocidad de propagación del sonido en el agua es de 1500 m/s. Una de las lentes se ha obtenido suponiendo que los "1" de la secuencia binaria representan zonas de bloqueo de presión y los "0" representan zonas transparentes, mientras que la otra lente se ha obtenido suponiendo lo contrario. En las Figuras 4(a) y 4(b) pueden observarse ambas lentes. Hay que tener en cuenta que, debido a las limitaciones físicas del montaje experimental, la distancia de separación entre el transductor y la lente no es lo suficientemente grande como para poder considerar onda plana, de modo que la lente ha sido diseñada para onda esférica empleando la siguiente ecuación [17]:

$$d + F + \frac{n\lambda}{2} = \sqrt{d^2 + r_n^2} + \sqrt{F^2 + r_n^2}, \quad (3)$$

donde  $d$  representa la distancia de separación entre la fuente puntual y la lente. En este caso, la lente ha sido diseñada para una separación entre transductor y lente de  $d = 340 \text{ mm}$ , valor suficientemente grande como para que el transductor opere en campo lejano. Pese a que la lente está diseñada para incidencia de onda esférica, el proceso de diseño es completamente análogo al desarrollado en la sección anterior.

La Figura 4(c) muestra los resultados experimentales de ambas lentes frente a los resultados numéricos obtenidos empleando la ecuación (2) considerando un transductor tipo pistón. Como se puede observar, los resultados experimentales concuerdan con los resultados numéricos y las lentes presentan un perfil con características fractales, tal y como se ha analizado en la sección anterior. Las diferencias existentes entre las medidas y los resultados numéricos pueden ser debidas a los soportes mecánicos en forma de cruz de las lentes fabricadas en latón, ya que no se han considerado en el modelo. Si se compara el caso de la lente de Cantor tipo 1 (Figura 4(a)) con el resultado obtenido para la lente de Cantor tipo 2 (Figura 4(b)), se aprecia que la intensidad focal de la lente tipo 1 es mayor que la de la lente tipo 2 y que los lóbulos secundarios están más próximos al lóbulo principal, tal y como sucede en el caso ideal analizado en la sección anterior. Ambos efectos son resultado del comportamiento directivo del pistón. A diferencia de una fuente puntual ideal que genera una onda esférica con igual intensidad en todas las direcciones del espacio, el pistón genera una onda esférica pero no distribuye por igual la intensidad en todas las direcciones del espacio. Este hecho distorsiona el perfil de focalización [17,18]. Por esta razón, la lente tipo 1 tiene un mejor comportamiento que la lente tipo 2, debido a que al tener el centro hueco aprovecha mejor la energía generada por el pistón, ya que en el centro de la lente es donde se reciben las contribuciones de presión con mayor energía.

FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIACUSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

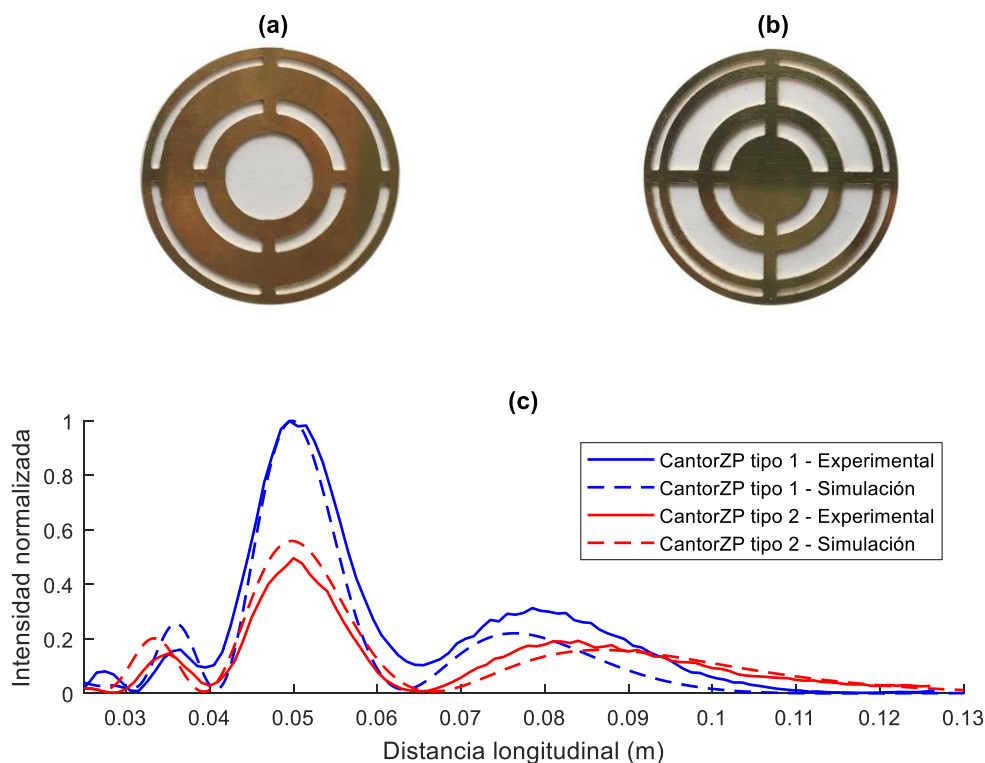


Figura 4: (a) Lente de Cantor tipo 1, (b) Lente de Cantor tipo 2 y (c) resultados experimentales frente a resultados numéricos: Cantor tipo 1 (azul) y Cantor tipo 2 (rojo). Los perfiles están normalizados respecto al máximo entre ambos.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se ha realizado un análisis teórico del diseño y las propiedades de focalización de las lentes basadas en secuencias binarias de Cantor. Dichas lentes presentan un perfil con un foco principal en la misma posición que la lente FZP asociada y múltiples focos secundarios adyacentes que replican las características fractales de la lente. Además, se han realizado medidas experimentales que concuerdan con los resultados obtenidos numéricamente, demostrando que el empleo de este tipo de lentes es posible en el campo de los ultrasonidos.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto MINECO/FEDER TEC2015-70939-R.



FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIACUSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] R. S. Rodrigues Ribeiro, P. Dahal, A. Guerreiro, P. A. S. Jorge, and J. Viegas, "Fabrication of Fresnel plates on optical fibres by FIB milling for optical trapping, manipulation and detection of single cells," *Sci. Rep.*, vol. 7, no. 1, 2017.
- [2] H. D. Hristov and M. H. A. J. Herben, "Millimeter-Wave Fresnel-Zone Plate Lens and Antenna," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 43, no. 12, pp. 2779–2785, 1995.
- [3] K. Jefimovs, O. Bunk, F. Pfeiffer, D. Grolimund, J. F. van der Veen, and C. David, "Fabrication of Fresnel zone plates for hard X-rays," *Microelectro.*
- [4] D. C. Calvo, A. L. Thangawng, M. Nicholas, and C. N. Layman, "Thin Fresnel zone plate lenses for focusing underwater sound," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 107, no. 1, p. 014103, Jul. 2015.
- [5] J. Fuster, P. Candelas, S. Castiñeira-Ibáñez, S. Pérez-López, and C. Rubio, "Analysis of Fresnel Zone Plates Focusing Dependence on Operating Frequency," *Sensors*, vol. 17, no. 12, p. 2809, Dec. 2017.
- [6] J. L. Soret, "Ueber die durch Kreisgitter erzeugten Diffractionsphänomene," *Ann. der Phys. und Chemie*, vol. 232, no. 9, pp. 99–113, 1875.
- [7] Lord Rayleigh, *Wave Theory*, vol. 24. 1888.
- [8] J. Kirz, "Phase zone plates for x rays and the extreme uv," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 64, no. 3, p. 301, Mar. 1974.
- [9] J. A. Monsoriu, A. Calatayud, L. Remon, W. D. Furlan, G. Saavedra, and P. Andres, "Bifocal Fibonacci Diffractive Lenses," *IEEE Photonics J.*, vol. 5, no. 3, pp. 3400106–3400106, Jun. 2013.
- [10] F. Machado, V. Ferrando, W. D. Furlan, and J. A. Monsoriu, "Diffractive m-bonacci lenses," *Opt. Express*, vol. 25, no. 7, p. 8267, Apr. 2017.
- [11] G. Saavedra, W. D. Furlan, and J. A. Monsoriu, "Fractal zone plates," *Opt. Lett.*, vol. 28, no. 12, p. 971, Jun. 2003.
- [12] W. D. Furlan, G. Saavedra, and J. A. Monsoriu, "White-light imaging with fractal zone plates," *Opt. Lett.*, vol. 32, no. 15, p. 2109, 2007.
- [13] O. Mendoza-Yero, M. Fernández-Alonso, G. Mínguez-Vega, J. Lancis, V. Climent, and J. A. Monsoriu, "Fractal generalized zone plates," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 26, no. 5, p. 1161, 2009.
- [14] S. Castiñeira-Ibáñez, D. Tarrazó-Serrano, C. Rubio, P. Candelas, and A. Uris, "An Ultrasonic Lens Design Based on Prefractal Structures," *Symmetry (Basel)*, vol. 8, no. 4, p. 28, Apr. 2016.
- [15] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier optics*. Roberts and Company Publishers, 2005.
- [16] D. Tarrazó-Serrano, P. Candelas, J. M. Fuster, and S. Pérez-López, "Sistema de posicionamiento y adquisición de datos de alta precisión para ultrasonidos en inmersión controlada," in *Tecniacústica*, 2017, pp. 1329–1336.
- [17] S. Pérez-lópez, D. Tarrazó-serrano, J. M. Fuster, P. Candelas, and C. Rubio, "FZP Design Considering Spherical Wave Incidence," in *ICU 2018*, 2018, vol. 12, no. 6, pp. 279–283.
- [18] S. Pérez-López, J. M. Fuster, P. Candelas, C. Rubio, and F. Belmar, "On the use of phase correction rings on Fresnel zone plates with ultrasound piston emitters," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 112, no. 26, p. 264102, Jun. 2018.