

PROYECCIÓN DE SEÑALES: UNA FORMULACIÓN GENERAL DEL PROBLEMA DE FORMACIÓN DE IMÁGENES ECOGRÁFICAS EN EL DOMINIO ESPACIO-FRECUENCIA. PARTE I: TEORÍA.

PACS: 43.60.Fg

Ibáñez Rodríguez, Alberto¹; Parrilla Romero¹, Montserrat; Martínez Graullera, Oscar¹.
¹Instituto de Física Aplicada y Tecnologías de la Información Leonardo Torres Quevedo (ITEFI) del Consejo Superior de Investigaciones Científicas. (CSIC)
c/Serrano 144.
28006 Madrid. España
Tel.: (+34) 915 618 806
Fax: (+34) 914 117 651
E-Mail: alberto.ibanez@csic.es

Palabras Clave: Ultrasound, Imaging, Beamforming, Ultrasonography.

ABSTRACT

This paper explores the problem of forming an image from the echoes that are produced by the emission of a pattern, arbitrary but known, of signals. It is proposed a formal definition of what an image is and, using the solution of the wave equation, it is shown the relationship at each point between the image, the emitted and received signals, the positions of the transducers, the speed of propagation of the signals and the reflectivity of the medium. Finally, it is derived an algorithm for the formation of images in homogeneous and isotropic media

RESUMEN

En este trabajo se estudia el problema de formar una imagen a partir de los ecos capturados por un array de transductores debidos a la emisión de un patrón de señales arbitrario pero conocido. Se propone una definición formal de imagen y, a partir de la solución de la ecuación de ondas, se muestra la relación de los puntos de la imagen con las señales emitidas y recibidas, las posiciones de los transductores, la velocidad de propagación de las señales y el mapa de reflectividad del medio. Para terminar, se deriva un algoritmo general para la formación de imágenes en medios homogéneos e isótropos.

1. INTRODUCCIÓN

La obtención activa de imágenes a partir de las señales de ecos, que se producen como consecuencia de la emisión controlada de señales ondulatorias desde un conjunto de emisores hasta un conjunto (array) de receptores, es una técnica utilizada en áreas tan diversas como radar, sonar, ecografía o imagen sísmica [1] [2] [3] [4] [5]. En términos prácticos consiste en la realización sistemática y ordenada de un conjunto de operaciones sobre los datos (crudos) recibidos para calcular los valores que se asignan a los píxeles que forman la imagen de salida. Imagen que pretende ser un mapa de las posiciones e intensidades de los reflectores existentes

en el medio por el que se han propagado las señales, o bien, de la amplitud de las señales reflejadas en ellos.

Todos los algoritmos de formación de imagen utilizan algún modelo de propagación de ondas para retroproyectar las señales medidas en los receptores hasta los reflectores, teniendo en cuenta que estos son emisores secundarios de las señales propagadas desde los emisores reales. Lo habitual es que cada algoritmo se diseñe para operar con esquemas de emisión-recepción específicos que imponen restricciones, por ejemplo, en la forma y distribución de los arrays de transductores, en las posiciones relativas entre los puntos de la imagen y de los arrays o en las características de las señales emitidas para iluminar el medio. También están adaptados a la forma de explorar el medio, ya sea mediante barridos en 2D o en 3D, lineales o sectoriales, con foco fijo en emisión y recepción o con focalización dinámica en recepción. Pueden utilizar técnicas de focalización de aperturas sintéticas (SAFT) con diferente número y tamaño de subaperturas y utilizar las señales en el dominio del tiempo o de la frecuencia, en el del espacio o el de las frecuencias espaciales, entre otras. Todas estas variantes hacen que la obtención de nuevos algoritmos continúe siendo un tema de gran interés en todos los campos de aplicación mencionados con el propósito de mejorar los ya existentes, por ejemplo, disminuyendo los tiempos de ejecución, dando solución a nuevos patrones de emisión recepción, utilizando modelos de propagación más precisos o adaptando métodos desarrollados para un campo de aplicación a las particularidades de otros.

En este trabajo pretendemos dar un enfoque general al problema de la formación activa de imágenes con arrays de emisores y receptores. Para ello, comenzaremos presentando un modelo genérico del problema que nos permitirá dar una definición formal y precisa de lo que, en este trabajo, entendemos por una imagen. De hecho definiremos dos modos de imagen: la imagen de amplitud de la señal reflejada y la imagen de la reflectividad del medio.

En el apartado siguiente, utilizaremos el modelo de propagación que resulta de resolver la ecuación de ondas en medios homogéneos e isótropos con fuentes puntuales y condiciones de espacio libre y, aplicando las definiciones de imagen propuestas, obtendremos una expresión que relaciona el valor de la imagen en cada punto con las señales que se utilizan para “iluminar” el medio. A continuación presentaremos un algoritmo que calcula la imagen como una función de las señales emitidas y recibidas, que es general en el sentido de que las únicas restricciones que impone son: emitir señales de amplitud, duración y ancho de banda finitos, y que los puntos de la imagen estén en el campo lejano de los transductores para que estos puedan considerarse emisores y receptores puntuales.

2. DEFINICIÓN DE LA IMAGEN COMO UNA PROYECCIÓN DE SEÑALES

En la Figura 1 se representa el modelo genérico que utilizamos para describir la emisión, propagación y captura de señales.

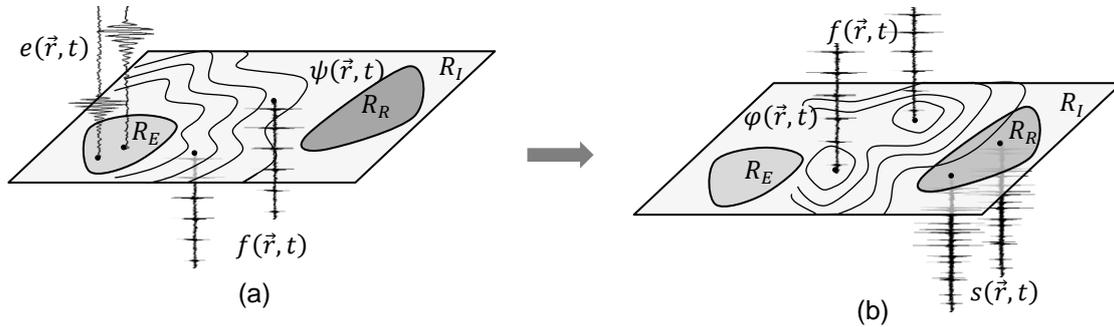


Figura 1: Modelo genérico utilizado donde se separan conceptualmente las señales emitidas y recibidas y los campos intermedios generados. En (a) se muestra la emisión de señales e y el campo de ondas directo generado ψ que, a su vez, da lugar a las señales reflejadas f . En (b), a partir de las señales anteriores (f) se forma el campo reflejado φ y su medida en los receptores da lugar a las señales s .

Consideramos una región del espacio R_I por la que se propaga algún tipo de señal ondulatoria $\psi(\vec{r}, t)$ y en la que, en cada punto \vec{r} de R_I , la fracción $C(\vec{r})$ de $\psi(\vec{r}, t)$ se refleja dando lugar a la señal:

$$f(\vec{r}, t) = C(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t) \quad (1)$$

si cada punto se comporta como un emisor secundario de esta señal, su propagación por el medio dará lugar al campo reflejado $\varphi(\vec{r}, t)$. Podemos considerar que este campo está formado, en cada punto, por la señal $f(\vec{r}, t)$ reflejada en él y por el campo $\tilde{\varphi}(\vec{r}, t)$, que es el resultado de la superposición en \vec{r} de las señales reflejadas en todo el resto del espacio y que se han propagado hasta allí:

$$\varphi(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) + \tilde{\varphi}(\vec{r}, t) \quad (2)$$

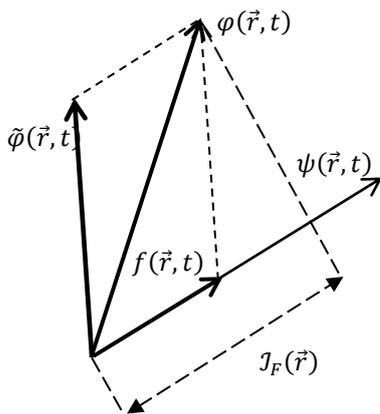


Figura 2: Representación geométrica de la imagen como proyección del campo reflejado sobre el emitido.

Suponemos, además, que el campo inicial $\psi(\vec{r}, t)$ está producido por un conjunto de emisores situados en la región R_E desde la que radian las señales $e(\vec{r}, t)$, con $\vec{r} \in R_E$, y que en la región R_R se encuentran receptores que al ser alcanzados por el campo reflejado $\varphi(\vec{r}, t)$ producen las señales $s(\vec{r}, t)$ con $\vec{r} \in R_R$. Podemos formular entonces el problema de la formación de imágenes como el de estimar la amplitud de $f(\vec{r}, t)$ en R_I a partir de $e(\vec{r}, t)$ y de $s(\vec{r}, t)$ y llamaremos imagen de la amplitud reflejada $J_F(\vec{r})$ a esta estimación. Análogamente, denominaremos imagen de reflectividad $J_C(\vec{r})$ a la estimación de $C(\vec{r})$ en R_I a partir de las mismas señales. Admitimos que todas las señales que intervienen son nulas fuera del intervalo temporal $[t_0, t_f]$, que tienen amplitud y energía finitas y que, en cada punto, se pueden representar por funciones continuas en el tiempo (reales o complejas) de cuadrado integrable. Dado que este tipo de funciones posee estructura de espacio vectorial con un producto escalar, podemos considerar que tanto $\psi(\vec{r}, t)$ como $\varphi(\vec{r}, t)$ son

campos de vectores en R_I . Considerados como vectores, y teniendo en cuenta (1) y (2), la componente $f(\vec{r}, t)$ de $\varphi(\vec{r}, t)$ es paralela a $\psi(\vec{r}, t)$, lo que nos permite, como muestra la Figura 2

definir la imagen de la amplitud reflejada $J_F(\vec{r})$ como la proyección, en cada punto, del campo reflejado $\varphi(\vec{r}, t)$ sobre el campo emitido $\psi(\vec{r}, t)$:

$$J_F(\vec{r}) = \frac{\langle \psi(\vec{r}, t), \varphi(\vec{r}, t) \rangle}{\|\psi(\vec{r}, t)\|} = \frac{\int_{t_0}^{t_f} \psi(\vec{r}, t) \overline{\varphi(\vec{r}, t)} dt}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_f} \psi(\vec{r}, t) \overline{\psi(\vec{r}, t)} dt}} \quad (3)$$

De la misma forma, definimos la imagen de reflectividad, que estima $C(\vec{r})$, como:

$$J_C(\vec{r}) = \frac{\langle \psi(\vec{r}, t), \varphi(\vec{r}, t) \rangle}{\|\psi(\vec{r}, t)\|^2} = \frac{\int_{t_0}^{t_f} \psi(\vec{r}, t) \overline{\varphi(\vec{r}, t)} dt}{\int_{t_0}^{t_f} \psi(\vec{r}, t) \overline{\psi(\vec{r}, t)} dt} \quad (4)$$

Aunque hemos definido ambas modalidades de imagen en función de los campos emitidos y reflejados expresados en el dominio del tiempo, la definición puede hacerse de la misma forma en el dominio de la frecuencia. Para ello basta tener en cuenta, por la relación de Parseval, que la transformada de Fourier es un operador que conserva el producto escalar. Por tanto, si las transformadas de Fourier de $\psi(\vec{r}, t)$ y de $\varphi(\vec{r}, t)$ son $\Psi(\vec{r}, \omega)$ y $\Phi(\vec{r}, \omega)$, respectivamente, y $[\omega_0, \omega_f]$ es el intervalo en el que tienen valores no nulos, entonces (3) y (4) son equivalentes a:

$$J_F(\vec{r}) = \frac{\langle \Psi(\vec{r}, \omega), \Phi(\vec{r}, \omega) \rangle}{\|\Psi(\vec{r}, \omega)\|} = \frac{\int_{\omega_0}^{\omega_f} \Psi(\vec{r}, \omega) \overline{\Phi(\vec{r}, \omega)} d\omega}{\sqrt{\int_{\omega_0}^{\omega_f} \Psi(\vec{r}, \omega) \overline{\Psi(\vec{r}, \omega)} d\omega}} \quad (5)$$

$$J_C(\vec{r}) = \frac{\langle \Psi(\vec{r}, \omega), \Phi(\vec{r}, \omega) \rangle}{\|\Psi(\vec{r}, \omega)\|^2} = \frac{\int_{\omega_0}^{\omega_f} \Psi(\vec{r}, \omega) \overline{\Phi(\vec{r}, \omega)} d\omega}{\int_{\omega_0}^{\omega_f} \Psi(\vec{r}, \omega) \overline{\Psi(\vec{r}, \omega)} d\omega} \quad (6)$$

El producto escalar que aparece en el numerador de estas expresiones, $\langle \psi(\vec{r}, t), \varphi(\vec{r}, t) \rangle = \langle \Psi(\vec{r}, \omega), \Phi(\vec{r}, \omega) \rangle$, formalmente corresponde a la correlación cruzada, con desplazamiento cero, entre el campo directo y el campo reflejado o, también, a la salida en $t=0$ de un filtro adaptado al campo directo que recibe como entrada el campo reflejado. Para utilizar estas definiciones en el cálculo de imágenes hay que emplear algún modelo de propagación que proporcione una estimación de los campos emitido y reflejado. En lo que sigue, utilizaremos la solución de la ecuación de ondas para fuentes puntuales en medios homogéneos e isótropos en el dominio de la frecuencia para obtener un algoritmo de formación de imagen.

3. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LA PROYECCIÓN DE SEÑALES AL CÁLCULO DE IMÁGENES EN MEDIOS HOMOGÉNEOS E ISÓTROPOS

En la exposición que sigue vamos a presentar un algoritmo para calcular imágenes en medios homogéneos e isótropos obtenido a partir del método propuesto. Para ello, al modelo genérico expuesto en la sección anterior se le aplican algunas simplificaciones habituales, como suponer que el campo directo debido a la emisión no se ve afectado por las reflexiones en el medio, o que el campo reflejado no experimenta reflexiones adicionales (ausencia de reverberaciones). Además, consideramos que las señales emitidas y recibidas se describen mediante las funciones $E(\vec{r}, \omega)$ y $S(\vec{r}, \omega)$, que son las transformadas de Fourier de las señales analíticas de Gabor de $e(\vec{r}, t)$ y $s(\vec{r}, t)$ respectivamente [6].

Si tenemos en cuenta que la propagación de las señales (tanto las directas como las reflejadas) es un proceso lineal descrito por la solución de la ecuación de ondas en un medio homogéneo e isótropo sin pérdidas podemos decir que el campo ondulatorio en cada punto del espacio $\vec{r} \in R_I$ es la convolución de las señales emitidas $e(\vec{r}', t)$, donde $\vec{r}' \in R_E^1$, con la respuesta espacial al impulso $h(\vec{r}, \vec{r}', t)$ del medio. En el dominio de la frecuencia esto corresponde al producto de

¹ Usamos letras con prima para nombrar las posiciones de los emisores.

$E(\vec{r}, \omega)$ por la función de transferencia $H(\vec{r}, \vec{r}_t, \omega)$. En el caso de un único emisor puntual situado en \vec{r}_t la función de transferencia es la función de Green de espacio libre para la ecuación de Helmholtz que, si el medio de propagación es tridimensional, corresponde a la amplitud compleja de una onda esférica con centro en \vec{r}_t , frecuencia angular ω y velocidad de propagación v [7]:

$$H(\vec{r}, \vec{r}_t, \omega) = \frac{e^{-j\omega|\vec{r}-\vec{r}_t|/v}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_t|} \quad (7)$$

con lo que el campo directo radiado hacia el medio es:

$$\Psi(\vec{r}, \omega) = H(\vec{r}, \vec{r}_t, \omega)E(\vec{r}_t, \omega) \quad (8)$$

Dado que los transductores actúan como emisores o receptores durante un tiempo limitado y que la velocidad de propagación v es finita, las señales $s(\vec{r}, t)$ medidas en R_R (y por tanto sus transformadas $S(\vec{r}, \omega)$) se ven afectadas únicamente por el campo que se refleja en una región acotada del espacio, a la que nos referiremos como la región de influencia (RI) que identificamos con la región R_I . Para simplificar la exposición, vamos a utilizar un modelo discreto del espacio de forma que R_I puede describirse convenientemente mediante el conjunto finito de puntos $\{\vec{r}_i\}$ con $I \in \mathbb{N}$ y P^2 . Así, el campo emitido se escribe como:

$$\Psi_i(\omega) = \Psi(\vec{r}_i, \omega) = H(\vec{r}_i, \vec{r}_t, \omega)E(\vec{r}_t, \omega) \quad (9)$$

que produce las señales reflejadas:

$$F_i(\omega) = F(\vec{r}_i, \omega) = C(\vec{r}_i)\Psi_i(\omega) = C_i\Psi_i(\omega) \quad (10)$$

En el caso de tener M emisores, situados en $\{\vec{r}_j\}$ emitiendo las señales $E_j(\omega) = E(\vec{r}_j, \omega)$, el campo directo es la superposición del creado por cada uno de ellos:

$$\Psi_i(\omega) = \sum_{j=1}^M H(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \omega)E_j(\omega) = \sum_{j=1}^M H_{i,j}(\omega)E_j(\omega) \quad (11)$$

y puede expresarse en forma matricial como:

$$\Psi = \mathbf{H}_F \mathbf{E} \quad (12)$$

donde $\Psi = [\Psi_1(\omega), \Psi_2(\omega), \dots, \Psi_P(\omega)]^T$ es el vector columna formado por el campo propagado directo en cada punto de la RI, $\mathbf{E} = [E_1(\omega), E_2(\omega), \dots, E_M(\omega)]^T$ el vector de emisión y $\mathbf{H}_F = [H_{i,j}(\omega)]$ la matriz de transferencia del campo directo, de tamaño $P \times M$, en la que cada fila está asociada a un punto de la RI y cada columna a un emisor.³

Del mismo modo, el campo reflejado es:

$$\Phi = \mathbf{H}_R \mathbf{F} \quad (13)$$

siendo \mathbf{F} el vector de señal reflejada. Tanto \mathbf{F} como Φ tienen dimensiones $P \times 1$. \mathbf{H}_R es la matriz de transferencia del campo reflejado, de tamaño $P \times P$, en la que forzamos que los elementos de la diagonal sean unos para que, de acuerdo con (2), el campo reflejado sea la superposición lineal de la señal reflejada en el punto con las propagadas desde los demás puntos de la RI.

El vector de señales reflejadas y el de campo directo están relacionados por:

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}\Psi \quad (14)$$

donde \mathbf{C} es la matriz $P \times P$ cuya diagonal son los coeficientes de reflectividad de cada punto de la RI (números reales positivos menores que uno) y los demás términos son cero (suponemos ausencia de reverberaciones). Si hay L receptores presentes, definimos el vector $L \times 1$ de señales

² La elección de estos puntos es tal que permite representar todas las funciones de la posición que estamos considerando: $E, e, \psi, \Psi, \varphi, \Phi, H, C, s, S$, por sus muestras tomadas en ellos.

³ Omitimos escribir la dependencia de ω en los nombres de matrices y vectores.

recibidas S , que corresponde al campo reflejado Φ medido en las posiciones de los receptores, como:

$$S = H_S F \quad (15)$$

H_S es la matriz de transferencia de señales de tamaño $L \times P$.

En lo que sigue consideraremos que los mismos transductores actúan como emisores y receptores sin que ambos modos de operación se solapen en el tiempo, que es lo habitual en imagen ecográfica.⁴ En este caso $M=L$ y, dada la simetría de la función de transferencia (7) de la que se deriva el principio de reciprocidad que permite intercambiar las posiciones \vec{r}_j' de los emisores y de los puntos de observación \vec{r} , $H(\vec{r}, \vec{r}_j', \omega) = H(\vec{r}_j', \vec{r}, \omega)$, por lo que la matriz de transferencia de campo directo es la traspuesta de la de señales recibidas:

$$H_F = H_S^T = H \quad (16)$$

Con esta notación, cada término H_{ij} de H se refiere siempre a la función de transferencia desde el transductor situado en \vec{r}_j' hasta el punto del medio \vec{r}_i . Finalmente, utilizando (12), (14), (15) y (16) el proceso completo de medida se expresa como:

$$S = H^T C H E \quad (17)$$

Así, formar una imagen es resolver el problema inverso de encontrar C en (17) suponiendo conocidos todos los demás términos. Sin embargo no es necesario resolver esta ecuación para obtener una imagen. Podemos obtener una estimación del campo reflejado basándonos solamente en el modelo de propagación directo y aplicando las expresiones (5) y/o (6). Para ello nos apoyamos en la simetría en el tiempo de la ecuación de onda y en la unicidad de la solución para un conjunto bien definido de condiciones iniciales y de contorno, lo que hace posible obtener una estimación $\overline{\Phi^E}$ del complejo conjugado del campo reflejado Φ mediante la reemisión sintética del conjugado de las señales recibidas S [8]:

$$\overline{\Phi^E} = H S \quad (18)$$

En efecto, conjugando (18) y aplicando (14), (15) y (16), se obtiene:

$$\Phi^E = \overline{H H^*} F = \overline{K} F = \overline{K} C \Psi \quad (19)$$

donde H^* es la traspuesta conjugada de H , por lo que $K = H H^*$ es una matriz hermitica cuyos elementos dependen de la velocidad de propagación en el medio, de las posiciones de los transductores y de los puntos de la RI. Denominando r_{ik} a la distancia desde cada punto i de la RI hasta cada transductor k , se tiene que:

$$K_{ij}(\omega) = \sum_{k=1}^M H_{ik}(\omega) \overline{H_{jk}(\omega)} = \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{k=1}^M \frac{e^{-j\omega(r_{ik}-r_{jk})/v}}{r_{ik} r_{jk}} \quad (20)$$

De (19) y (20) resulta que la estimación del campo reflejado en el punto i de la RI es la superposición de versiones atenuadas y desplazadas en fase de las señales reflejadas en cada uno de los puntos j de la RI. El cambio de fase de cada una de ellas es función de la diferencia de caminos desde los puntos i y j a cada transductor k . En los términos de la diagonal, en los que i es igual a j , el desfase es cero por lo que la contribución de la señal $F_i(\omega)$ (la reflejada en i) a la estimación del campo reflejado $\Phi_i^E(\omega)$ en ese mismo punto es proporcional al campo directo $\Psi_i(\omega)$ que llega hasta él, con una constante de proporcionalidad real e independiente de la frecuencia, tal y como se postulaba en el modelo general expuesto en la sección precedente.

⁴ La generalización al caso de emisores y receptores separados es sencilla.

A partir de ahora, vamos a considerar únicamente el cálculo de la imagen de reflectividad definida en (6), una argumentación semejante puede realizarse con la imagen de amplitud de señal reflejada (5). Llevando (19) y (20) a (6) se tiene que el valor J_{C_i} de la imagen en el punto i (supuesto que el módulo del campo directo en él es mayor que cero) es:

$$\begin{aligned} J_{C_i} &= \frac{\langle \Psi_i(\omega), \Phi_i^E(\omega) \rangle}{\|\Psi_i(\omega)\|^2} = \frac{\langle \Psi_i(\omega), \sum_{j=1}^M \overline{K_{ij}} C_j \Psi_j(\omega) \rangle}{\|\Psi_i(\omega)\|^2} \\ &= C_i \sum_{k=1}^M \frac{1}{(4\pi r_{ik})^2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \left(\frac{C_j}{\|\Psi_i(\omega)\|^2} \int_{\omega_0}^{\omega_f} K_{ij}(\omega) \Psi_i(\omega) \overline{\Psi_j(\omega)} d\omega \right) \end{aligned} \quad (21)$$

donde se pone de manifiesto que el valor de J_{C_i} es el valor del coeficiente de reflectividad C_i multiplicado por un factor que es función de las distancias desde el punto a cada transductor. A este término se le suman otros debidos a la existencia de más reflectores en el medio ($C_j \neq 0$) que son alcanzados por el campo directo ($\Psi_j(\omega) \neq 0$). Claramente, cuanto más pequeño sea el resultado de esta suma de perturbaciones mayor semejanza guardará la imagen $\mathcal{J}_C = [J_{C_1}, J_{C_2}, \dots, J_{C_p}]^T$ con la diagonal de \mathcal{C} . Si asociamos las perturbaciones a las integrales que aparecen en (21), resulta que las que más afectan a la imagen son las que se originan en los puntos de mayor reflectividad ($C_j \approx 1$), y que un punto es más resistente a estas perturbaciones cuanto más intenso es el campo directo que le ilumina ($\|\Psi_i(\omega)\|^2 \gg 0$). En cuanto al valor de las perturbaciones, de (7), (12) y (20) se tiene que cada una de las integrales que aparecen en (21) se puede escribir como:

$$\int_{\omega_0}^{\omega_f} K_{ij}(\omega) \overline{\Psi_j(\omega)} \Psi_i(\omega) d\omega = \sum_{k,l,m=1}^M G_{ijklm} \int_{\omega_0}^{\omega_f} E_l(\omega) \overline{E_m(\omega)} e^{-j\xi_{ijklm}\omega} d\omega \quad (22)$$

$$\text{con } G_{ijklm} = \frac{1}{(4\pi)^4 r_{ik} r_{jk} r_{il} r_{jm}} \text{ y } \xi_{ijklm} = \frac{r_{ik} - r_{jk} + r_{il} - r_{jm}}{v}.$$

Según (22), la perturbación que se origina en cada punto es una suma ponderada de integrales de funciones oscilatorias a lo largo del eje de la variable ω con una "frecuencia" de oscilación ξ_{ijklm} . El valor absoluto de estas integrales tiende a cero al aumentar ξ_{ijklm} , y lo hace más rápidamente cuanto mayor es el ancho de banda efectivo de la señal, que es el que determina el tamaño del intervalo de integración. En general, cuanto más distante esté el punto i del j mayor será ξ_{ijklm} y menor será el valor de esa suma de integrales y, por tanto, la influencia de C_j en el valor de J_{C_i} que proponemos como estimación de C_i . Estas perturbaciones son las que producen los patrones de difracción característicos de este tipo de imágenes que, como se desprende de (22), dependen de las señales de excitación aplicadas a los transductores y de las posiciones relativas entre estos y los puntos de la imagen.

3.1 Algoritmo de Formación de Imagen.

Las ecuaciones (21) y (22) son explicativas, ya que relacionan la imagen con las señales emitidas, las posiciones de los transductores y la reflectividad del medio, pero no sirven para realizar el cálculo de imágenes a partir de medidas reales. Para obtener una expresión de utilidad práctica debemos tener en cuenta que lo habitual es trabajar con sistemas muestreados en los que todas las señales se representan mediante secuencias temporales de longitud finita. Su forma en el dominio de la frecuencia es la de secuencias finitas de números complejos que se obtienen aplicando la transformada de Fourier Discreta (TFD) a las secuencias muestreadas. En estas condiciones el valor de la imagen de reflectividad, para secuencias formadas por N puntos, se expresa como:

$$J_{c_i} = \frac{\langle \Psi_i(n), \Phi_i^E(n) \rangle}{\|\Psi_i(n)\|^2} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \Psi_i(n) \overline{\Phi_i^E(n)}}{\sum_{n=0}^{N-1} \Psi_i(n) \overline{\Psi_i(n)}} = \frac{\sum_{n \in B} \Psi_i(n) \overline{\Phi_i^E(n)}}{\sum_{n \in B} \Psi_i(n) \overline{\Psi_i(n)}} \quad (23)$$

donde B es el conjunto de los índices para los que los términos de la TFD de las señales no son nulos.

En la práctica, para calcular (23), hay que sustituir el campo directo Ψ_i y la estimación del campo reflejado Φ_i^E por las expresiones (12) y (18). En estas solo intervienen los valores de las señales emitidas, de las señales recibidas y las funciones de transferencia desde de los transductores a los puntos de la imagen, todos ellos conocidos. El vector imagen de reflectividad J_c se puede escribir entonces como:

$$J_c = \left(\sum_{n \in B} ((HS) \circ (HE)) \right) \circ \left(\sum_{n \in B} ((HE) \circ (\widehat{HE})) \right) \quad (24)$$

donde el operador \circ representa el producto de Hadamard y el símbolo $\widehat{}$ indica la matriz inversa de Hadamard [9], [10].

En el desarrollo inicial se utilizó una matriz de transferencia H con una fila por cada uno de los puntos que son necesarios para muestrear $C(\vec{r})$ en la RI sin pérdida de información. Esto era necesario para poder escribir, en (17), las señales recibidas S como una función de las señales emitidas E y de las reflectividades C . En (24) se utiliza directamente el vector de señales S medido en los receptores que, por ser una medida real, contiene la información de todos los reflectores presentes en la RI, y H se utiliza para calcular los campos directos y reflejados únicamente en los Q puntos de interés (PI), dentro de la RI, en los que realmente se quiere calcular la imagen $J = [J_1, J_2, \dots, J_Q]^T$, por lo que sus dimensiones son $Q \times M$, con términos de la forma:

$$H_{ij}(n) = \frac{e^{-j\frac{\omega(n)}{v}r_{ij}}}{r_{ij}} = \frac{e^{-j\frac{2\pi n f_s}{Nv}r_{ij}}}{r_{ij}} = \frac{e^{-j\frac{2\pi}{\lambda(n)}r_{ij}}}{r_{ij}} \quad (25)$$

donde f_s es la frecuencia a la que se han muestreado las señales emitidas y recibidas, N es el número de muestras que forman cada señal y $\lambda(n)$ es la longitud de onda en el medio de propagación a la frecuencia asociada al término n obtenido de la TFD de las señales. Se ha omitido el factor $1/4\pi$ que aparece en (7) ya que es una constante que multiplica a toda la imagen.

CONCLUSIONES

A diferencia de otros algoritmos para la obtención de imágenes en medios homogéneos e isótropos, el método definido por (24) y (25) es general, ya que no impone restricciones a la forma de las señales emitidas por cada transductor (salvo la de ser señales de duración finita a las que se puede aplicar la Transformada de Fourier), ni obliga a que haya alguna forma de sincronización entre ellas. El método propuesto proporciona una imagen válida en cualquier circunstancia. No obstante, su calidad sí que está determinada, como en cualquier otro algoritmo de imagen, por la elección que se haga de las señales de excitación y de la distribución de transductores, como se desprende de (21) y (22).

Aunque explícitamente no se ha puesto ninguna limitación para la elección de los PI en los que calcula la imagen ni a las posiciones de los transductores, sí que se ha supuesto que estos son puntuales, por lo que los resultados que se obtienen son suficientemente precisos solo si los puntos de la imagen se encuentran en el campo lejano de los transductores y pueden despreciarse los efectos debidos a los patrones de difracción individuales de cada uno de ellos, que es lo que ocurre en muchas aplicaciones. Hay veces, como en Evaluación no Destructiva (NDE) a alta frecuencia, en que los PI se encuentran en el campo próximo de los transductores [11]. En estos casos la forma, el tamaño y el modo de emisión de cada transductor sí debe tenerse en cuenta. En el método que proponemos, la forma de hacerlo es modelar cada transductor con una malla que cubre su superficie. Los nodos de estas mallas se consideran

emisores puntuales y deben estar separados menos de la mitad de la longitud de onda más corta que emiten al medio. En [12] se describe y justifica cómo calcular la función de transferencia de transductores extensos que se comportan a cada frecuencia como pistones apodizados. También se contempla la posibilidad de utilizar las funciones de Green para condiciones de contorno de baffle rígido o baffle blando en lugar de la de espacio libre (7) para ajustarse a las condiciones específicas de cada aplicación.

En aplicaciones de NDE es habitual que los transductores y los PI se encuentren en medios distintos y/o se produzcan reflexiones casi-especulares en la propagación de las ondas entre los transductores y los PI. El método descrito es aplicable a estos casos siempre que sea posible encontrar una matriz de transferencia que relacione las señales emitidas con el campo que alcanza los PI. En [13] se muestra cómo obtener, a cada frecuencia, la llamada Matriz de Transferencia Monocromática (MTM) que proporciona la amplitud compleja en los PI, situados en medio homogéneo e isótropo, debida a emisores situados en otro medio, separado del primero por una frontera de curvatura suave. En dicho trabajo se demuestra que la MTM global se obtiene multiplicando la MTM que proporciona el campo en la frontera cuando emiten los transductores reales, por la MTM que proporcionaría el campo en los PI si se produjera la emisión desde transductores virtuales situados en la frontera que separa los dos medios.

Finalmente, señalar que con este método se obtiene por separado la contribución a la imagen de cada una de las frecuencias presentes en las señales. En el cálculo de esta contribución aparece explícitamente, en (25), la velocidad de propagación –o la longitud de onda- a cada frecuencia, por lo que se abre la posibilidad de utilizarlo también para obtener imágenes en medios dispersivos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado dentro del proyecto: FIS2013-46829-R financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad.

A Carlos Valdecantos Martínez que nos inició en el campo de los ultrasonidos y nos regaló su amistad, DEP.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] K. Ouchi, "Recent Trend and Advance of Synthetic Aperture Radar with Selected Topics," *Remote Sensing*, vol. 5, no. 2, pp. 716-807, 2013.
- [2] R. E. Hansen, "Synthetic Aperture Sonar Technology Review," *Marine Technology Society Journal*, vol. 47, no. 5, pp. 117-127, 2013.
- [3] P. N. T. Wells, "Ultrasound Imaging," *Physics in Medicine & Biology*, vol. 51, no. 13, p. R83, 2006.
- [4] B. W. Drinkwater and P. D. Wilcox, "Ultrasonic arrays for non-destructive evaluation: A review," *NDT&E International*, vol. 39, no. 7, pp. 525-541, 2006.
- [5] S. Rost and C. Thomas, "Array Seismology: Methods and Applications," *Reviews of geophysics*, vol. 40, no. 3, 2002.
- [6] D. Gabor, "Theory of communication," *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, vol. 93, pp. 429-441, 1946.
- [7] A. J. Devaney, "Super-resolution Processing of Multi-static Data Using Time Reversal and MUSIC," 2000. [Online]. Available: <http://www.ece.neu.edu/faculty/devaney/ajd/preprints.htm>. [Accessed 24 04 2017].

- [8] M. Fink and C. Prada, "Acoustic time-reversal mirrors," *Inverse problems*, vol. 17, no. 1, p. R1, 2001.
- [9] G. P. H. Styan, "Hadamard products and multivariate statistical analysis," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 6, pp. 271-240, 1973.
- [10] E. Million, "The hadamard product," 12 April 2007. [Online]. Available: <http://buzzard.ups.edu/courses/2007spring/projects/million-paper.pdf>. [Accessed January 2017].
- [11] T. Stepinski, "An implementation fo Synthetic Aperture Focusing Technique in Frequency Domain," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 54, no. 7, pp. 1399-1408, 2007.
- [12] A. Ibáñez, C. Fritsch, M. Parrilla and J. Villazón, "Monochromatic transfer matrix method for acoustic field simulation thorough media boundaries.," *Physics Procedia*, vol. 3, no. 1, pp. 883-890, 2010.
- [13] A. Ibáñez, M. Parrilla and J. Villazón, "Simulation of ultrasonic continuous wave fields in homogeneous media with soft curved interfaces," in *9th European Conference on NDT*, Berlin, 2006.