

APROXIMACIÓN A LA PROPAGACIÓN DE PULSOS EN ESTRUCTURAS ELÁSTICAS MULTICAPA

PACS:43.20.Dk

Solana Quirós P.E. (1); Picard López M. A. (1); Arizo Serrulla J.V. (2)
Universidad Politécnica de Valencia

(1) Departamento de Física Aplicada. E.T.S. de I. Industriales

(2) Departamento de Ingeniería e Infraestructura de los Transportes. E.T.S. de I. de Caminos, Canales y Puertos

Camino de Vera s/n. Apartado de Correos 22012

46022 Valencia. España

Tel: 34 963 877 524, 34 963 877 007 ext 75244

Fax: 34 963 879 529

E-mail: psolana@fis.upv.es; mapicard@fis.upv.es, jarizos@tra.upv.es

ABSTRACT

In this paper, the acoustic propagation through elastic means is approached. It uses the product of a temporary function and the delta of Dirac for the intensity and positioning of the source. The propagation is based on the elastic equations and potentials. Through Laplace and Fourier transformed and approaching the source by means of overlapping Laplace transformed of plane waves, the vectorial displacement in function of the intensity of the source is obtained.

RESUMEN

El objeto de este estudio es el desarrollo de un modelo matemático que permita aproximar la propagación de pulsos acústicos generados por una fuente puntual transitoria a través de estructuras elásticas multicapa. Este problema, que presenta gran interés práctico ha sido estudiado por numerosos autores empleando diversas técnicas matemáticas. En este modelo, la intensidad emitida y posicionamiento de la fuente puntual se construye mediante el producto de una función temporal y la delta de Dirac. El proceso de propagación se apoya en las ecuaciones básicas de la elasticidad y su solución mediante la introducción de los potenciales de desplazamientos y fuerzas. El empleo de las transformadas de Laplace y Fourier permiten obtener la solución para una fuente puntual. La aproximación de la fuente puntual esférica mediante superposición de transformadas de Laplace de ondas planas, conduce a una solución de las componentes del vector desplazamiento. Finalmente, la implementación numérica contempla la resolución numérica de ecuaciones mediante el empleo de numerosos algoritmos, la cuadratura gaussiana para integrales dobles o de Simpson para las integrales de convolución. La superposición de respuestas es también realizada numéricamente. Finalmente se obtienen los valores de los desplazamientos en función de la intensidad de la fuente.

1. INTRODUCCIÓN

En estructuras elásticas multicapa que presentan diferencias significativas en los parámetros materiales se generan, por efecto túnel, ondas peliculares en la interface con respuestas importantes que pueden ser dominantes. Así, si una fuente sonora se encuentra en la proximidad de la interface entre dos medios rápido y lento, la respuesta en el medio lento está dominada por una señal propagada a través del medio rápido. En particular, cuando una fuente sonora dilatacional está cerca de la superficie de un medio elástico, se produce una transformación de la onda longitudinal a transversal en la superficie, con velocidades de propagación distintas. Aparecen dos ondas superficiales que se propagan en la interfaz plana sólido-fluido cuando el valor de la velocidad de propagación sonora en el fluido c_F se encuentra entre los valores de la transversal y la longitudinal en el sólido. Si c_F es más baja que las velocidades de la onda transversal c_S y la onda longitudinal volumétrica c_P en el sólido la onda de Rayleigh se propaga con una velocidad de fase más baja que la c_S y radia la energía al fluido y la velocidad de fase de la onda de Stoneley es más baja que las velocidades en los tres medios. El problema de una fuente que emite pulsos transitorios en medios estratificados, es de gran interés práctico, para el cálculo del aislamientos o en ensayos no destructivos, por ello ha sido estudiado por numerosos autores, [1] - [4]. El esquema básico de perturbación se centra en la resolución de dos problemas fundamentales, fuente dilatacional en presencia de interfaz fluido/sólido y en el de la proximidad de una capa delgada que permite una velocidad elevada. En el primero aparecen respuestas separadas debido a la desigualdad de los medios y la conversión de la onda en la interface. En el segundo, la capa delgada de velocidad alta perturba el campo generado por la fuente en el medio circundante más lento.

2. ECUACIONES BÁSICAS EN UN MEDIO INFINITO

La ecuación de ondas no-homogénea fundamental para pequeñas oscilaciones elásticas en los cuerpos, es de la forma,

$$(I + m)\bar{\mathbf{N}}(\bar{\mathbf{N}} \cdot \bar{\mathbf{w}}) + m\nabla^2 \bar{\mathbf{w}} + r\bar{\mathbf{f}}_M = r\partial^2 \bar{\mathbf{w}} / \partial t^2 \quad (1)$$

donde, $\bar{\mathbf{w}}$, vector-desplazamiento de las partículas del medio, r , masa específica, I y m , coeficientes de Lamé, t , tiempo. En un medio homogéneo e isótropo, la propagación de ondas longitudinales, c_P , exige que $\bar{\mathbf{N}} \times \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{0}}$, en tanto que para las ondas transversales, c_S , $\bar{\mathbf{N}} \cdot \bar{\mathbf{w}} = 0$. La ecuación del desplazamiento en función de las velocidades adoptará la forma,

$$(c_P^2 - c_S^2)\bar{\mathbf{N}}(\bar{\mathbf{N}} \cdot \bar{\mathbf{w}}) + c_S^2 \nabla^2 \bar{\mathbf{w}} + \bar{\mathbf{f}}_M = r\partial^2 \bar{\mathbf{w}} / \partial t^2 \quad (2)$$

En general, las ondas elásticas producidas cualquier fuente puntual asimétrica como una fuerza concentrada aplicada oblicuamente, dipolo, etc., pueden representarse mediante tres funciones potenciales \bar{j} , \bar{y} y \bar{c} del desplazamiento; las condiciones de contorno a imponer son la continuidad de las tensiones y los desplazamientos para cada coordenada a través de las correspondientes interfaces paralelas, en cada instante. El vector-desplazamiento obtenido a partir del potencial \bar{c} será paralelo a los planos $z = cte$ y el movimiento de la onda correspondiente se designa como onda-SH. Como, \bar{c} no está acoplado con los otros dos potenciales en las condiciones de contorno, y las ondas reflejadas y transmitidas, debido a la incidencia en la interface de dos capas de la onda-SH, se polarizan también horizontalmente, el movimiento de la onda total puede ser descompuesto en dos partes, ondas-P y ondas-SV representadas por los potenciales \bar{j} y \bar{y} , y ondas-SH, por \bar{c} . Cada parte se refleja y refracta independientemente de la otra a lo largo de las capas. Representando los campos $\bar{\mathbf{w}}$ y $\bar{\mathbf{f}}_M$ en función de los potenciales de la forma,

$$\bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{N}}\bar{j} + \bar{\mathbf{N}} \times \bar{\mathbf{y}} \quad (3a)$$

$$\vec{f}_M = \vec{N}b + \vec{N} \times \vec{B} \quad (3b)$$

siendo, b y \vec{B} , s potenciales escalar y vectorial de fuerza másica, respectivamente, y $\vec{N} \cdot \vec{y} = 0$ y $\vec{N} \cdot \vec{B} = 0$, satisfacen (2) si:

$$\begin{bmatrix} c_P^2 & 0 \\ 0 & c_S^2 \end{bmatrix} \circ \nabla^2 \begin{bmatrix} \vec{J} \\ \vec{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\vec{J}} \\ \dot{\vec{y}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Considerando el medio elástico inicialmente en reposo, las condiciones iniciales para (4) implican la anulaci3n de \vec{w} y $\dot{\vec{w}}$ en $t=0$, quedando, $\vec{J} = \dot{\vec{J}} = 0$, $\vec{y} = \dot{\vec{y}} = \vec{0}$, en $t=0$.

Para una fuente puntual transitoria de intensidad A_P , $\vec{A}_S = [A_{S_x} \ A_{S_y} \ A_{S_z}]^t$, situada en \vec{r}'_0 frente a un medio infinito y serie temporal $f(t)$ y el punto-campo \vec{r} , ($\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}'_0$), la fuerza másica,

$$\begin{bmatrix} b \\ \vec{B} \end{bmatrix} = f(t) \begin{bmatrix} A_P \\ \vec{A}_S \end{bmatrix} \mathbf{d}(\vec{r} - \vec{r}'_0) \quad (5)$$

2.1. Soluci3n particular en un medio infinito

En el caso de fuente puntual perturbando un medio infinito, homogéneo e is3tropo, aplicando las transformadas integrales de Laplace a los potenciales en la ecuaci3n (4),

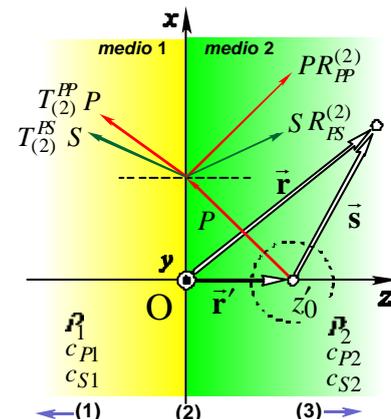
$$\begin{bmatrix} c_P^2 & 0 \\ 0 & c_S^2 \end{bmatrix} \circ \nabla^2 \begin{bmatrix} \vec{J} \\ \vec{y} \end{bmatrix} - s^2 \begin{bmatrix} \vec{J} \\ \vec{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (6)$$

siendo $\vec{J}(\vec{r}, s)$ la transformada de Laplace respecto a t de parámetro s constante, real y positivo del potencial escalar $\vec{J}(\vec{r}, t)$ (análogamente para $\vec{y}(\vec{r}, t)$). La soluci3n particular se interpreta como suma (integraci3n sobre \mathbf{x} y \mathbf{k}), de ondas planas emitidas por la fuente en todas direcciones y será,

$$\begin{bmatrix} \vec{J}_0(\vec{r}, s) \\ \vec{y}_0(\vec{r}, s) \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} A_P \bar{f}_P(s) \\ \vec{A}_S \bar{f}_S(s) \end{bmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} e^{s g_P(\vec{s}, \mathbf{x}, \mathbf{k})} & 0 \\ 0 & e^{s g_S(\vec{s}, \mathbf{x}, \mathbf{k})} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} S_P \\ S_S \end{bmatrix} d\mathbf{x} d\mathbf{k} \quad (7)$$

donde, $\bar{f}_P(s) = \bar{f}(s) / 8\pi^2 c_P^2$, $\bar{f}_S(s) = \bar{f}(s) / 8\pi^2 c_S^2$, y las funciones de emitancia de la fuente $S_P = (c_P^{-2} + \mathbf{x}^2 + \mathbf{k}^2)^{-1/2}$, $S_S = (c_S^{-2} + \mathbf{x}^2 + \mathbf{k}^2)^{-1/2}$, con $\mathbf{h} \text{Re} \mathbf{h} \geq 0$ y $\mathbf{z} \text{Re} \mathbf{z} \geq 0$. Mediante la aplicaci3n de la transformada de Fourier espacial bidimensional respecto a las coordenadas x e y , estas ecuaciones se reducen a ecuaciones diferenciales ordinarias.

Las funciones de fase para las ondas esféricas P y S reflejadas/transmitidas y para las superposiciones de las ondas planas P y S reflejadas/transmitidas, se obtienen calculando el tiempo total invertido en el trayecto entre fuente y receptor a lo largo de la trayectoria reflejada/transmitida. Para el c3lculo, se aplica la ley de Snell igualando las fases en la interface de las respectivas ondas. Las amplitudes se obtienen multiplicando la amplitud de la onda incidente por los coeficientes del reflecci3n/transmisi3n correspondientes.



Los coeficientes de reflexión en la interface serán, R^{PP} y $\mathbf{R}^{PS} = [R^{PS_x} \ R^{PS_y} \ R^{PS_z}]^t$.

Fig. 1 Trayectorias de las ondas incidente, reflejada y transmitida para la onda-P incidente sobre la interface (2).

2.2. Dos semiespacios

Para dos semiespacios en el contacto en $z=0$ perturbados por una fuente puntual de dilatación de intensidad unidad, $A_p=1$ y $\bar{\mathbf{A}}_S=\bar{\mathbf{0}}$, localizada en el medio 2 en $\bar{\mathbf{r}}'_0$, fig. 1, las ondas reflejadas P y S serán:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}}_2(\bar{\mathbf{r}},s) \\ \bar{\mathbf{y}}_2(\bar{\mathbf{r}},s) \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \bar{f}_P(s) \\ \bar{f}_P(s) \end{bmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} e^{s g_{PP}(\bar{\mathbf{s}},\mathbf{x},\mathbf{k})} & 0 \\ 0 & e^{s g_{PS}(\bar{\mathbf{s}},\mathbf{x},\mathbf{k})} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} S_P R_{PP}^{(2)} \\ S_P \mathbf{R}_{PS}^{(2)} \end{bmatrix} d\mathbf{x} d\mathbf{k} \quad (8)$$

Las funciones de emitancia serán $S_P = (c_{P2}^{-2} + \mathbf{x}^2 + \mathbf{k}^2)^{-1/2}$, $S_S = (c_{S2}^{-2} + \mathbf{x}^2 + \mathbf{k}^2)^{-1/2}$.

El desplazamiento resultante en un receptor situado en el medio-fuente, es, por superposición, $\bar{\mathbf{J}}_0 + \bar{\mathbf{J}}_2$ y las tres componentes de $\bar{\boldsymbol{\theta}}_2$.

Si $z'_0=0$, en (8), $g_P(\bar{\mathbf{r}};\mathbf{x},\mathbf{k}) = j\mathbf{x}x + j\mathbf{k}y - \mathbf{h}z$, $g_S(\bar{\mathbf{r}};\mathbf{x},\mathbf{k}) = j\mathbf{x}x + j\mathbf{k}y - \mathbf{z}z$, y la matriz de coeficientes de reflexión en la superficie libre, $\mathbf{R}^{PS} = [R^{PS_x} \ R^{PS_y} \ 0]^t$

En el medio 1, las ondas esféricas P y S transmitidas vienen dadas, respectivamente, por:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}}_1(\bar{\mathbf{r}},s) \\ \bar{\mathbf{y}}_1(\bar{\mathbf{r}},s) \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \bar{f}_P(s) \\ \bar{f}_P(s) \end{bmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} e^{s g_{PP}(\bar{\mathbf{s}},\mathbf{x},\mathbf{k})} & 0 \\ 0 & e^{s g_{PS}(\bar{\mathbf{s}},\mathbf{x},\mathbf{k})} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} S_P T_{(2)}^{PP} \\ S_P \mathbf{T}_{(2)}^{PS} \end{bmatrix} d\mathbf{x} d\mathbf{k} \quad (9)$$

siendo, $g_{PP}(\bar{\mathbf{s}},\mathbf{x},\mathbf{k}) = j\mathbf{x}x + j\mathbf{k}y - \mathbf{h}_2 z'_0 - \mathbf{h}_1 z$ y $g_{PS}(\bar{\mathbf{s}},\mathbf{x},\mathbf{k}) = j\mathbf{x}x + j\mathbf{k}y - \mathbf{h}_2 z'_0 - \mathbf{z}_1 z$, las funciones de fase. Los coeficientes de transmisión en la interface serán, T^{PP} , $\mathbf{T}^{PS} = [T^{PS_x} \ T^{PS_y} \ T^{PS_z}]^t$. Cuando el receptor está sobre el plano interface $z=0$, se convierte en superficie receptora y los rayos forman un rayo-P coalescente. Si D_i^P son las funciones en la superficie receptora,

$$\bar{w}_i^P(x,y,0,s) = s^2 \bar{F}_P(s) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_P D_i^P e^{s(j\mathbf{x}x + j\mathbf{k}y - \mathbf{h}_2 z'_0)} d\mathbf{x} d\mathbf{k} \quad (i=x,y,z) \quad (10)$$

2.3. Capa de espesor d

En una capa de espesor d perturbada por una fuente puntual de dilatación de intensidad unidad $A_p=1$ y $\bar{\mathbf{A}}_S=\bar{\mathbf{0}}$ situada dentro de la capa a la distancia z'_0 de la interface 2 (fig. 2) se agrupan los rayos reflejados atendiendo al número de reflexiones consecutivas en la interface y la superficie libre antes de localizar al receptor de la superficie. El primer grupo contiene sólo el rayo-P coalescente. El segundo, rayos pP y pS y el tercero a los rayos PpP , PpS , PsP y PsS , etc.

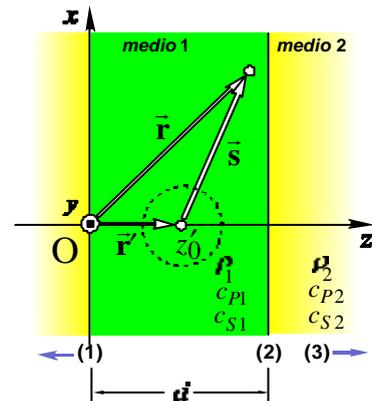


fig. 2 Capa de espesor d a continuación del semiespacio.

Las respuestas de la superficie debidas a los rayos pP y pS para $\vec{r}_1 = [x \ y \ 0]^t$, serán,

$$\bar{w}_i^{pP}(\vec{r}_1, s) = s^2 \bar{f}_P(s) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_P R_{PP} D_i^P e^{s g_{pP}(\vec{r}_1; \mathbf{x}, \mathbf{k})} d\mathbf{x} d\mathbf{k} \quad (11a)$$

$$\bar{w}_i^{pS}(\vec{r}_1, s) = s^2 \bar{f}_P(s) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_P \left(R_{PS_x} D_i^{S_x} + R_{PS_y} D_i^{S_y} \right) e^{s g_{pS}(\vec{r}_1; \mathbf{x}, \mathbf{k})} d\mathbf{x} d\mathbf{k} \quad (11b)$$

donde, $i = x, y, z$, R_{PP} , R_{PS_x} , R_{PS_y} , coeficientes de reflexión en la interface y D_i^P , $D_i^{S_x}$, $D_i^{S_y}$ funciones receptoras superficiales. Y, $g_{pP}(x, y, 0; \mathbf{x}, \mathbf{k}) = j\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + j\mathbf{k} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{h}_1 (2d - z'_0)$; $g_{pS}(x, y, 0; \mathbf{x}, \mathbf{k}) = i\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{h}_1 (d - z'_0) - \mathbf{z}_1 d$.

Realizando la transformación ortogonal de variables de integración reales p y q definida por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{q} & \text{sen} \mathbf{q} \\ -\text{sen} \mathbf{q} & \cos \mathbf{q} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \quad (12)$$

se obtienen los desplazamientos transformados de Laplace en un receptor arbitrario en \vec{r} debido a los rayos múltiplemente reflejados y transmitidos:

$$\begin{bmatrix} \bar{w}_x(\vec{r}, s) \\ \bar{w}_y(\vec{r}, s) \\ \bar{w}_z(\vec{r}, s) \end{bmatrix} = -4s^2 \bar{f}_P(s) \begin{bmatrix} \text{Im} \\ \text{Im} \\ \text{Re} \end{bmatrix} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \begin{bmatrix} p E_x(p, q) \cos \mathbf{q} \\ p E_y(p, q) \text{sen} \mathbf{q} \\ E_z(p, q) \end{bmatrix} e^{s g(\vec{r}; p, q)} dp dq \quad (13)$$

donde, $E_x(p, q)$, $E_y(p, q)$ y $E_z(p, q)$ son funciones de p y q y $g(\vec{r}; p, q)$ la función de fase.

3. GENERALIZACIÓN A MÚLTIPLES CAPAS

Para una estructura multicapa se utiliza la solución general de las transformadas de Laplace de los potenciales para un medio homogéneo e isótropo, añadiendo el subíndice i ($i=1,2,3,\dots$) a las magnitudes físicas correspondientes de cada capa, y utilizando alguna de las diversas variantes del método de Cagniard, en particular, el método de inversión modificado de Cagniard-de Hoop, aplicable a rayos múltiplemente reflejados y transmitidos en el dominio-tiempo en un sólido estratificado perturbado por la fuente puntual (5). Este método introduce una transformación de p a t en función de la fase definida por:

$$g(\vec{r}; p, q) = j p r - \sum_{i=1}^{i=2} z_i \sqrt{a_i^2 + p^2 + q^2} = -t \quad (14)$$

donde, q , constante real, t real positivo con dimensiones de tiempo; z_i , proyección total sobre el eje z de todos los segmentos de la trayectoria asociada con la inversa de la velocidad de onda a_i . ($a_4 < a_3 < a_2 < a_1$, en donde $a_1 = c_{S1}^{-1}$, $a_2 = c_{P1}^{-1}$, $a_3 = c_{S2}^{-1}$ y $a_4 = c_{P2}^{-1}$, son las respectivas inversas de las velocidades de propagación de la onda en la capa y en el medio 1).

Así, empleando (14), de la primera ecuación de (13) una vez empleado el teorema de convolución se obtiene como resultado global para las tres componentes:

$$\bar{w}(\bar{r}, t) = A \int_{t_A}^t \ddot{f}(t-t^*) \bar{I}(\bar{r}, t^*) dt^* \quad (15)$$

siendo:

$$\begin{bmatrix} I_x(\bar{r}, t^*) \\ I_y(\bar{r}, t^*) \\ I_z(\bar{r}, t^*) \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} \text{Im} \\ \text{Im} \\ \text{Re} \end{bmatrix} \int_0^{q_1(t^*)} \left(\int_0^{p_1(t^*; q)} p(t; q) \begin{bmatrix} E_x[p(t; q), q] \cos q \\ E_y[p(t; q), q] \text{sen} q \\ E_z[p(t; q), q] \end{bmatrix} dp(t) \right) dq(t) \quad (16)$$

donde, $q_1(t^*) = g^{-1}(\bar{r}; 0, t^*)$, $p_1(t^*; q) = g^{-1}(\bar{r}; t^*, q)$.

La ecuación (15), junto a las (16) proporciona, en el dominio de tiempo, los desplazamientos en el receptor. La respuesta total se representa mediante la suma finita de respuestas parciales de todos los rayos que llegan al receptor, directos y refractados en el tiempo de observación establecido. Siendo el tiempo de llegada para el rayo directo es $t_d = -g(\bar{r}; p_d, 0)$, en donde, $p_d = j b_d$, $0 \leq b_d \leq a_2$. La distancia mínima del receptor r_m en la que es registrado el rayo refractado viene dada por:

$$r_m = a_m \sum_{n=1}^{n=2} z_n (a_n^2 - a_m^2)^{1/2} = 0 \quad m = 3, 4 \quad (17)$$

y cuando $r > r_m$, el rayo llega siguiendo el camino refractado en el instante:

$$t_m = r a_m + \sum_{n=1}^{n=2} z_n (a_n^2 - a_m^2)^{1/2} = 0 \quad m = 3, 4 \quad (18)$$

4. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

A partir de (17) se calcula r_m y se compara con r para evaluar el tiempo de llegada apropiado. Una vez que el contorno de Cagniard-de Hoop y el semieje $q \geq 0$ están parametrizados en t , se realiza la integración para un intervalo de tiempo constante. Los límites superiores de integración $q_1(t^*) = g^{-1}(\bar{r}; 0, t^*)$ y $p_1(t^*; q) = g^{-1}(\bar{r}; t^*, q)$ se obtienen resolviendo numéricamente $t(q) = -g(\bar{r}; 0, q)$ y $t = -g(\bar{r}; p, q)$ para q y p . Las integrales de convolución en (16) se calculan numéricamente mediante la regla de Simpson. La suma de respuestas se realiza numéricamente eligiendo un tiempo de observación común para todos los rayos.

5. CONCLUSIONES

Se ha expuesto un método de cálculo tridimensional mediante la transformada de Laplace de la onda elástica que se propaga a lo largo del rayo. Se aplica una modificación del método de Cagniard-de Hoop a los rayos para obtener su transformada inversa de Laplace. Utilizando este procedimiento de inversión en los integrandos de las inversas de las integrales del rayo no interviene la derivada de la inversa de la función de fase y son más adecuados para su integración numérica. La aplicación numérica comprende, el cálculo del tiempo de llegada de los rayos, la integración numérica de las integrales y la evaluación de la respuesta total.

REFERENCIAS

- [1] Craster, R.V., A canonical problem for fluid-solid interfacial wave coupling. Proc. Roy. Soc. Lond. A 452 (1996) 1695-1711.
- [2] Drijkoningen, G.G., Tunneling and the generalized ray method in piecewise homogeneous media. Geophysical Prospecting **39** (1991) 757-781.
- [3] Pao, Y.H.; Zeigler, F.; Wang, Y.S., Acoustic waves generated by a point source in a sloping fluid layer. J. Acoust. Soc. Am. **85** (1989) 1414-1426.
- [4] Pao, Y.H.; Gajewski, R.R. The generalized ray theory and transient responses of layered elastic solids. Physical Acoustics, **13**, Academic Press, New York, (1977) 183-265.