

CARACTERIZACIÓN ACÚSTICA DE SILENCIADORES ELÍPTICOS MEDIANTE AJUSTE MODAL. COMPARACIÓN CON OTROS RESULTADOS

REFERENCIA PACS: 43.20.Mv

Denia Guzmán, F. D.; Albelda Vitoria, J.; Tarancón Caro, J. E.; Fuenmayor Fernández, F. J.
Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales. Universidad Politécnica de Valencia
Camino de Vera, s/n.
46022 Valencia. España
Tel: 96 387 76 26
Fax: 96 387 76 29
E-Mail: fradegu1@mcm.upv.es

ABSTRACT

The mode-matching technique has been applied to obtain the acoustic performance of elliptical chamber mufflers. The orthogonality properties of Bessel and Mathieu functions are considered, which leads to set of equations that allows to calculate the propagation coefficients in the circular inlet and outlet pipes, and in the elliptical chamber. The acoustic attenuation behaviour of some geometries has been studied and the results are shown to agree quite well with those given by the finite element method and experimental measurements. An increase in the accuracy is obtained in comparison with the point-source method.

RESUMEN

Se ha aplicado la técnica de ajuste modal para obtener la caracterización acústica de silenciadores elípticos. Utilizando las propiedades de ortogonalidad de las funciones de Bessel y de Mathieu, se llega a un sistema de ecuaciones que permite evaluar los coeficientes de propagación en los conductos circulares de entrada y salida, así como en la cámara elíptica. se ha estudiado la atenuación acústica para algunas geometrías, y los resultados obtenidos muestran una buena concordancia con los calculados mediante elementos finitos y medidos experimentalmente. La precisión de la técnica presentada es mayor que la obtenida mediante el método de excitación puntual.

1. INTRODUCCIÓN

La caracterización acústica de silenciadores de escape de motores de combustión interna alternativos puede ser abordada analítica, numérica y experimentalmente [1]. En el primer caso, ha de obtenerse la solución tridimensional de la ecuación de ondas en el dominio definido por el silenciador, esto es, un conducto de entrada y otro de salida, generalmente circulares, y una cámara central, que suele ser circular o elíptica, y que en el caso más simple no contiene elementos adicionales en su interior. Los modelos analíticos presentan claras ventajas computacionales frente a métodos numéricos como elementos finitos o elementos de contorno, aunque tienen una limitación asociada a la geometría, que debe ser simple, es decir, rectangular, circular o elíptica. De los modelos analíticos posibles, la técnica de ajuste modal (mode-matching) es la más exacta, y se basa en la continuidad del campo de presiones y

velocidades en dirección axial en las discontinuidades geométricas formadas por los distintos conductos. Esta técnica ha sido aplicada con éxito en geometrías donde la cámara central, así como los tubos de entrada y salida, son circulares [2, 3]. El presente trabajo se centra en la aplicación del método de ajuste modal a silenciadores en los que la cámara central es elíptica, dada su importancia en aplicaciones prácticas y el escaso tratamiento analítico encontrado en la bibliografía [4]. Para ello se utilizan las funciones de Bessel y las de Mathieu [5], y sus propiedades de ortogonalidad. Esta metodología viene a mejorar el modelo presentado en [6], en el cual se utiliza el método de excitación puntual, cuyas hipótesis dejan de ser válidas cuando las dimensiones de los tubos de entrada y salida no son pequeñas en comparación con las de la cámara. La técnica de ajuste modal no realiza ninguna hipótesis simplificativa en relación a la excitación, ya que considera la propagación acústica en el dominio completo, es decir, tubos de entrada y salida así como cámara, de modo que también se obtiene una mejora apreciable en comparación con otros métodos analíticos como el de pistón [7], que no considera la propagación de modos evanescentes en los tubos de entrada y salida. Con la técnica desarrollada, se ha evaluado la atenuación acústica de diversas geometrías por medio de su índice de pérdidas de transmisión (TL), y los resultados se han comparado con otros obtenidos mediante elementos finitos y medidos experimentalmente con el método del impulso modificado [8], mostrando una buena concordancia. También se muestran algunos resultados que ponen de manifiesto el aumento de precisión en comparación con el método de excitación puntual.

2. ECUACIONES BÁSICAS DE LA PROPAGACIÓN

Se considera una cámara de expansión simple, formada por dos conductos circulares de entrada y salida y una cámara central de sección transversal elíptica, tal como muestra la Figura 1. La configuración es concéntrica, de modo que no es necesario utilizar el teorema de adición de Graf para realizar el cambio de coordenadas [3]. En los tubos, los modos de propagación vienen dados por las funciones de Bessel. En la cámara se utilizan las funciones de Mathieu, que pueden ser expresadas en forma de serie de funciones de Bessel. Sólo es necesario considerar aquellos modos que son simétricos respecto a ambos ejes de la elipse.

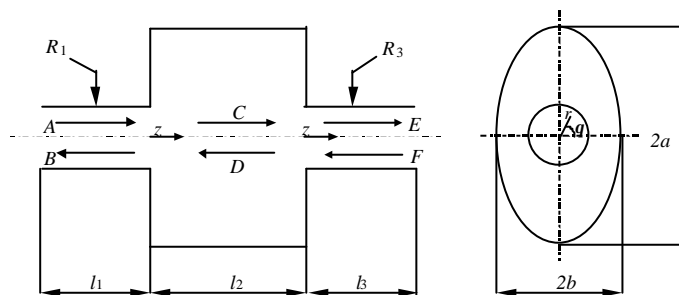


Figura 1. Geometría de la cámara.

De esta manera, el campo de presión en el tubo de entrada se puede expresar como

$$P_1 = P_A + P_B = A_{0,0} e^{-jkz} + B_{0,0} e^{+jkz} + \sum_m^* \sum_n^* (A_{2m,n} e^{+jk_{1,2m,n}z} + B_{2m,n} e^{-jk_{1,2m,n}z}) \cos(2m\theta) J_{2m} \left(\frac{a_{2m,n}}{R_1} r \right) \quad (1)$$

siendo P_1 la presión, $A_{m,n}$ y $B_{m,n}$ los coeficientes de propagación, j la unidad imaginaria, $k = \omega/c_0$ el número de onda (ω la frecuencia angular de excitación y c_0 la velocidad del sonido), y J_m la función de Bessel de primera especie y orden m . Los términos $a_{m,n}$ son las raíces de las derivadas de las funciones de Bessel, que se obtienen a partir de la condición de velocidad nula en la superficie del tubo, es decir, en $r=R_1$. Los valores de dichas raíces no dependen del radio. Como es sabido, m y n denotan los números modales circunferenciales y radiales, respectivamente. En la cámara considerada, con dos ejes de simetría, solo es necesario considerar los m pares. Los asteriscos del sumatorio indican que no se incluye el término en el que simultáneamente $m=n=0$. Además, se tiene la relación

$$k_{1,m,n} = k \sqrt{1 - \left(\frac{a_{m,n}}{k R_1}\right)^2} \quad (2)$$

que proporciona el número de onda del modo (m, n) en el tubo de entrada. Para la cámara elíptica se tiene el campo de presiones expresado a partir de las funciones de Mathieu,

$$P_2 = (C_{0,0} e^{-jkz} + D_{0,0} e^{+jkz}) ce_0(v, q_{0,0}) Ce_0(u, q_{0,0}) + \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} (C_{2m,n} e^{+jk_{2m,n}z} + D_{2m,n} e^{-jk_{2m,n}z}) ce_{2m}(v, q_{2m,n}) Ce_{2m}(u, q_{2m,n}) \quad (3)$$

donde $C_{m,n}$ y $D_{m,n}$ son los coeficientes de propagación, y ce_m y Ce_m son las funciones pares de Mathieu y Mathieu modificadas, respectivamente. Los términos $q_{m,n}$ son las raíces de las derivadas de las funciones de Mathieu modificadas, que se obtienen a partir de la condición de velocidad nula en la superficie de la cámara, de coordenada $u = u_w$. Los valores dependen de la excentricidad de la elipse. Sólo se toman los modos de orden $2m$, dado que son los únicos que mantienen la simetría respecto a ambos ejes de la elipse. De nuevo m y n denotan los números modales circunferenciales y radiales (elípticos), respectivamente. Además, se tiene el número de onda del modo (m, n) en la cámara

$$k_{2,m,n} = k \sqrt{1 - \frac{4q_{m,n}}{(k r)^2}} \quad (4)$$

donde r es la semidistancia focal. Es importante disponer de los desarrollos en serie de las funciones de Mathieu. Éstos son

$$ce_{2s}(v, q) = \frac{ce_{2s}\left(\frac{p}{2}, q\right)}{A_0^{(2s)}} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t A_{2t}^{(2s)} J_{2t}(2\sqrt{q} \cos v); \quad Ce_{2s}(u, q) = \frac{ce_{2s}\left(\frac{p}{2}, q\right)}{A_0^{(2s)}} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t A_{2t}^{(2s)} J_{2t}(2\sqrt{q} \cosh u) \quad (5, 6)$$

La transformación de coordenadas que permite pasar (3) a coordenadas cilíndricas es

$$ce_{2s}(v, q) Ce_{2s}(u, q) = \frac{ce_{2s}(0, q) ce_{2s}\left(\frac{p}{2}, q\right)}{A_0^{(2s)}} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t A_{2t}^{(2s)} J_{2t}\left(\frac{2\sqrt{q}}{r} r\right) \cos(2t\theta) \quad (7)$$

3. AJUSTE MODAL EN LA EXPANSIÓN Y EN LA CONTRACCIÓN

Las condiciones de contorno a aplicar son la continuidad de la presión y de la componente axial de la velocidad en la sección del tubo entrante a la cámara (S_1), así como velocidad nula en la placa elíptica de entrada a la cámara ($S_{2i}-S_1$). Es decir,

$$\begin{aligned} (P_A + P_B)|_{z=0} &= (P_C + P_D)|_{z=0} & 0 \leq r \leq R_1 & & (U_A + U_B)|_{z=0} &= (U_C + U_D)|_{z=0} & 0 \leq r \leq R_1 \\ (U_C + U_D)|_{z=0} &= 0 & \text{en } S_{2i} - S_1 & & & & \end{aligned} \quad (8-10)$$

donde U es la velocidad acústica, dada por la ecuación siguiente [1]

$$U = -\frac{1}{j \rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (11)$$

siendo ρ_0 la densidad del fluido. Se introduce la nomenclatura siguiente

$$\mathbf{L}_{m,n,v,w} = ce_m(v, q_{m,n}) ce_m(w, q_{m,n}); \mathbf{Y}_{e,f,g,h} = \frac{2\sqrt{q_{e,f}}}{\mathbf{r}} R_1 J'_g \left(\frac{2\sqrt{q_{e,f}}}{\mathbf{r}} R_1 \right) J_g(\mathbf{a}_{g,h}) \left(\left(\frac{\mathbf{a}_{g,h}}{R_1} \right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{q_{e,f}}}{\mathbf{r}} \right)^2 \right)^{-1} \quad (12, 13)$$

La ecuación (8) se expresa en función de los desarrollos en serie (1) y (3) (esta última se transforma a polares mediante (7)), se multiplica por $J_c(\hat{a}_{c,d} r/R_1) \cos(c\hat{e})$, $c=0, 1, 2, \dots$ y $d=0, 1, 2, \dots$, y se integra en S_1 . Para $c=0$ y $d=0$, se obtiene

$$(A_{0,0} + B_{0,0}) \frac{R_1^2}{2} = (C_{0,0} + D_{0,0}) \frac{R_1^2}{2} \mathbf{L}_{0,0,0,p/2} + \sum_m^* \sum_n^* (C_{2m,n} + D_{2m,n}) \mathbf{L}_{2m,n,0,p/2} \frac{J_1 \left(\frac{2\sqrt{q_{2m,n}}}{\mathbf{r}} R_1 \right) R_1 \mathbf{r}}{2\sqrt{q_{2m,n}}} \quad (14)$$

Se observa que si se toma solamente el modo de onda plana aparece una constante de escalado debido a que se ha expresado este modo incluyendo las funciones de Mathieu, en lugar de separarlo como en (1). El factor de corrección de onda plana, resultado de la existencia de modos de alto orden, depende de q (que es función exclusiva de la excentricidad), de alguna dimensión de la cámara, como \mathbf{r} ; y del radio del tubo de entrada R_1 .

Para $c=0$ y $d=1, 2, \dots$, se tiene

$$(A_{0,d} + B_{0,d}) \frac{R_1^2}{2} J_0^2(\mathbf{a}_{0,d}) = \sum_m^* \sum_n^* (C_{2m,n} + D_{2m,n}) \mathbf{L}_{2m,n,0,p/2} \mathbf{Y}_{2m,n,0,d} \quad (15)$$

Para $c=2, 4, 6, \dots$ y $d=0, 1, 2, \dots$, resulta

$$(A_{c,d} + B_{c,d}) \frac{R_1^2}{2} \left(1 - \left(\frac{c}{\mathbf{a}_{c,d}} \right)^2 \right) J_c^2(\mathbf{a}_{c,d}) = \sum_m^* \sum_n^* (C_{2m,n} + D_{2m,n}) \mathbf{L}_{2m,n,0,p/2} \frac{(-1)^{c/2} A_c^{(2m,n)}}{A_0^{(2m,n)}} \mathbf{Y}_{2m,n,c,d} \quad (16)$$

Las condiciones de contorno de velocidad requieren un tratamiento algo más complicado. En principio se multiplican ambas, (9) y (10), por $ce_c(v, q_{c,d}) Ce_c(u, q_{c,d})$. Después, la ecuación (9) se integra en S_1 y la (10) en $S_2 \cap S_1$, y luego se suman. Esto es equivalente a integrar $U_A + U_B$ en S_1 , expresado en coordenadas cilíndricas, y $U_C + U_D$ en S_2 expresado en coordenadas elípticas.

Para $c=0$ y $d=0$, hay que tener en cuenta que la raíz considerada es $q_{0,0}$, las funciones de Mathieu de orden cero son constantes y tanto $ce_0(v, q_{0,0})$ como $Ce_0(u, q_{0,0})$ tienen el mismo valor, dando lugar a

$$R_1^2 (A_{0,0} - B_{0,0}) = \mathbf{L}_{0,0,0,p/2} ab (C_{0,0} - D_{0,0}) \quad (17)$$

que no es más que la ecuación de continuidad del modelo de onda plana para velocidades (la constante de escalado aparece de nuevo).

Para $c=0$ y $d=1, 2, 3, \dots$, resulta un conjunto de ecuaciones cuyo término izquierdo es,

$$\frac{\mathbf{L}_{0,d,0,p/2}}{A_0^{(0,d)}} \left(2\mathbf{p} A_0^{(0,d)} \sum_{n=0}^{\infty} k_{1,0,n} (A_{0,n} - B_{0,n}) \mathbf{Y}_{0,d,0,n} + \mathbf{p} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m A_{2m}^{(0,d)} k_{1,2m,n} (A_{2m,n} - B_{2m,n}) \mathbf{Y}_{0,d,2m,n} \right) \quad (18)$$

Para el otro término del conjunto de ecuaciones no hay que realizar la transformación a coordenadas cilíndricas, dado que se trabaja en el área elíptica. Para $c=0$ y $d=1, 2, 3, \dots$, se obtiene

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{2,2m,n} (C_{2m,n} - D_{2m,n}) \frac{\mathbf{r}^2}{2} \int_0^{u_w} \int_0^{2p} ce_{2m}(v, q_{2m,n}) Ce_{2m}(u, q_{2m,n}) ce_c(v, q_{c,d}) Ce_c(u, q_{c,d}) (\cosh(2u) - \cos(2v)) du dv$$

La integral de la ecuación (19) es nula salvo para $2m=c$ y $n=d$ [5]. Las integrales relacionadas con la variable circunferencial v se pueden llevar a cabo analíticamente utilizando las expresiones de la referencia [5],

$$\int_0^{2p} c e_m^2(v, q) dv = p \quad ; \quad \int_0^{2p} c e_{2m}^2(v, q) \cos(2v) dv = p \left(A_0^{(2m)} A_2^{(2m)} + \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2m)} A_{2r+2}^{(2m)} \right) \quad (20, 21)$$

mientras que las que contienen la variable radial u se realizan numéricamente.

Para $c=2, 4, 6, \dots$ y $d=0, 1, 2, 3, \dots$, el término izquierdo del conjunto de ecuaciones es,

$$\frac{I_{c,d,0p/2}}{A_0^{(c,d)}} \left(2p A_0^{(c,d)} \sum_{n=0}^{\infty} k_{1,0,n} (A_{0,n} - B_{0,n}) Y_{c,d,0,n} + p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m A_{2m}^{(c,d)} k_{1,2m,n} (A_{2m,n} - B_{2m,n}) Y_{c,d,2m,n} \right) \quad (22)$$

Para deducir las expresiones del otro término del conjunto de ecuaciones se aplican las mismas propiedades que en el caso anterior, de modo que, para $c=2, 4, 6, \dots$ y $d=0, 1, 2, 3, \dots$, las expresiones asociadas se obtienen a partir de

$$k_{2,c,d} (C_{c,d} - D_{c,d}) \frac{R^2}{2} \left(\int_0^{u_w} C e_c^2(u, q_{c,d}) \cosh(2u) du \int_0^{2p} c e_c^2(v, q_{c,d}) dv - \int_0^{u_w} C e_c^2(u, q_{c,d}) du \int_0^{2p} c e_c^2(v, q_{c,d}) \cos(2v) dv \right) \quad (23)$$

En la contracción, las condiciones de contorno a aplicar son la continuidad de la presión y de la componente axial de la velocidad en la sección de salida de la cámara al tubo (S_3), así como velocidad nula en la placa elíptica de salida de la cámara ($S_{2o}-S_3$), esto es,

$$\begin{aligned} (P_C + P_D)|_{z=l_2} &= (P_E + P_F)|_{z=0} \quad 0 \leq r \leq R_3 & (U_C + U_D)|_{z=l_2} &= (U_E + U_F)|_{z=0} \quad 0 \leq r \leq R_3 \\ (U_C + U_D)|_{z=l_2} &= 0 \quad \text{en } S_{2o} - S_3 \end{aligned} \quad (24-26)$$

La técnica a aplicar es similar a la anterior, y se obtiene un sistema de ecuaciones con la diferencia de que ahora el radio a considerar es el del tubo de salida, R_3 , y las exponenciales que multiplican a los coeficientes de propagación en la cámara ya no son iguales a 1, debido a que la coordenada z de la contracción no es 0 sino l_2 para dichos coeficientes.

Dado que los modos de alto orden tienen un efecto decreciente en la solución, se toma para c y d un número finito de valores, y los desarrollos modales se truncan de forma que se obtiene un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas. Su solución permite obtener los coeficientes de propagación en cada conducto y caracterizar el silenciador acústicamente, como se muestra en el siguiente apartado.

4. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Las Figuras 2 y 3 muestran el índice de pérdidas de transmisión (TL) obtenido para dos geometrías de silenciadores cuya longitud de cámara es grande en comparación con los radios de los tubos de entrada y salida. Éste se puede evaluar de forma sencilla una vez conocidos los coeficientes de propagación [3]. En las dos primeras figuras la solución obtenida mediante el método propuesto se compara con la calculada mediante el método de excitación puntual, cálculos de elementos finitos y resultados experimentales. Como puede observarse en las gráficas, la concordancia es buena en el rango de frecuencia considerado, incluso en aquellas zonas en las que el inicio de la propagación de modos de alto orden da lugar a un comportamiento complejo.

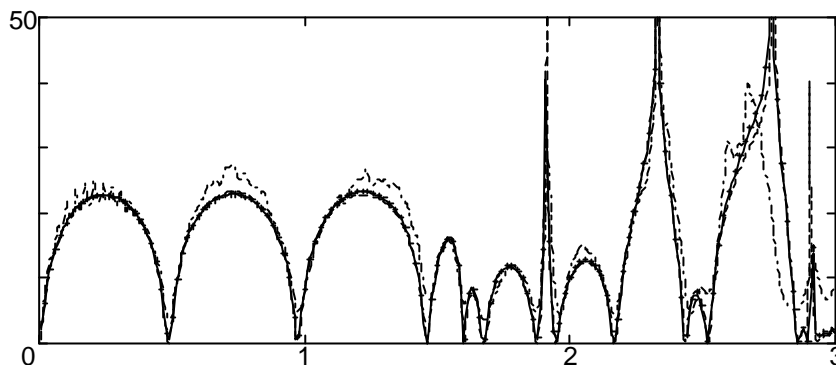


Figura 2. TL(dB) en función de la frecuencia (kHz) para una cámara elíptica con $a=0.23/2m$, $b=0.13/2 m$ y $l_2=0.35 m$:
- - -, experimental; — · — ·, excitación puntual; +, elementos finitos; —, ajuste modal.

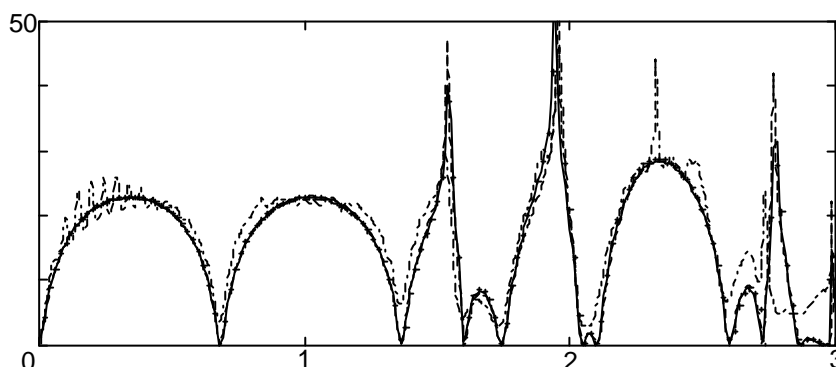


Figura 3. TL(dB) en función de la frecuencia (kHz) para una cámara elíptica con $a=0.23/2m$, $b=0.13/2 m$ y $l_2=0.25 m$:
- - -, experimental; — · — ·, excitación puntual; +, elementos finitos; —, ajuste modal.

La Figura 4 muestra los resultados de ajuste modal, excitación puntual y elementos finitos para una cámara corta. Se observa una pérdida de precisión del método de excitación puntual, debido a que la cámara tiene una longitud reducida y por tanto las hipótesis del método no se cumplen. La técnica de ajuste modal y el método de elementos finitos dan soluciones prácticamente similares, mostrando las ventajas del método propuesto en cuanto a precisión.

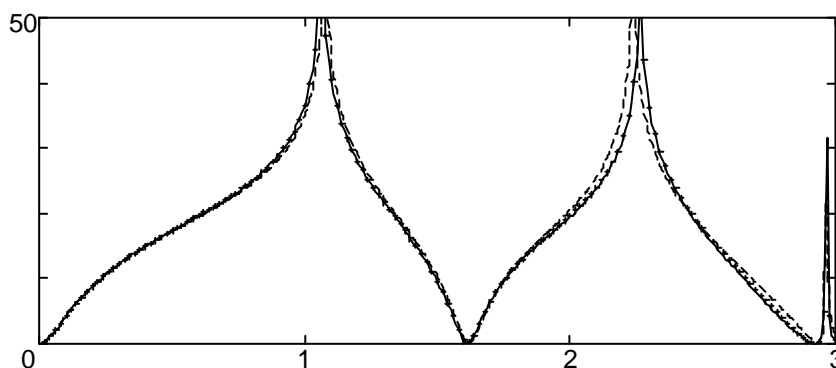


Figura 4. TL(dB) en función de la frecuencia (kHz) para una cámara elíptica con $a=0.23/2m$, $b=0.13/2 m$ y $l_2=0.05 m$:
— · — ·, excitación puntual; +, elementos finitos; —, ajuste modal.

5. CONCLUSIONES

Se ha aplicado el método de ajuste modal para caracterizar la atenuación acústica de silenciadores de escape con sección transversal elíptica. Los resultados obtenidos muestran una buena concordancia con otros de tipo analítico, numérico y experimental. Este método no introduce simplificaciones en la excitación, de modo que hay un aumento de precisión, al considerar la propagación en los tubos de entrada y salida, respecto a técnicas analíticas más simples como la de excitación puntual. En comparación con la solución de elementos finitos, el

método utilizado presenta claras ventajas computacionales al utilizar modos analíticos. Además, se puede generalizar de forma simple para incluir la presencia de placas perforadas, tubos de entrada y salida descentrados, cámaras con tubos extendidos, cámaras reversas, etc.

6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo es resultado del proyecto TAP97-1270-C02-02 de la CICYT.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] M. L. Munjal 1987 *Acoustics of Ducts and Mufflers*. New York: Wiley Interscience.
- [2] A. Selamet y P. M. Radavich 1997 *Journal of Sound and Vibration* **201**, 407-426. The effect of length on the acoustic attenuation performance of concentric expansion chambers: an analytical, computational and experimental investigation.
- [3] A. Selamet y Z. L. Ji 1998 *Journal of Sound and Vibration* **213**, 601-617. Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with offset inlet/outlet: I. Analytical approach.
- [4] K. Hong y J. Kim 1995 *Journal of Sound and Vibration* **183**, 327-351. Natural mode analysis of hollow and annular elliptical cylindrical cavities.
- [5] N. W. McLachlan 1964 *Theory and Application of Mathieu Functions*. New York: Dover Publications.
- [6] F. D. Denia, J. Albelda, F. J. Fuenmayor y A. J. Torregrosa 1999 *Pendiente de aceptación en Journal of Sound and Vibration*. Acoustic behaviour of elliptical chamber mufflers.
- [7] J-G. Ih y B-H. Lee 1985 *Journal of the Acoustical Society of America* **77**, 1377-1388. Analysis of higher-order mode effects in the circular expansion chamber with mean flow.
- [8] F. Payri, J. M. Desantes y A. Broatch 2000 *Journal of the Acoustical Society of America* **107**, 731-738. Modified impulse method for the measurement of the frequency response of acoustic filters to weakly nonlinear transient excitations.