

MODELIZACIÓN DE CAMPO ACÚSTICO EN APLICACIONES MACROSÓNICAS MEDIANTE ELEMENTOS DE CONTORNO CON CONDICIONES DE IMPEDANCIA

REFERENCIAS PACS: 43.20.Rz, 43.20.Ks, 02.70.Pt, 02.70.Jn

José Ignacio Linares Hurtado y David Gil Alías
Escuela Técnica Superior de Ingeniería (ICAI)
Universidad Pontificia Comillas de Madrid
c/ Alberto Aguilera, 23, 28015 - Madrid, España.
Teléf.: 915 42 28 00 / Fax: 915 59 65 69
E-mail: linares@dfc.icaí.upco.es

SUMMARY

High frequency acoustic field calculation by Boundary Element Method in closed chambers of great dimension has a lot of difficulties because high number of elements are required. Here a procedure to solve this problem is described, consisting on dividing the chamber in some subregions and connecting them with acoustic impedance conditions. The procedure is valid for both rigid and deformed vibrating surface with some limitations which are exposed in the communication.

INTRODUCCIÓN

Los tratamientos macrosónicos son utilizados desde hace tiempo con éxito en la limpieza de productos de combustión como un preacondicionamiento para los filtros electrostáticos¹. La aplicación de tales tratamientos se lleva a cabo en cámaras de grandes dimensiones situadas entre la chimenea y el sistema de filtración. Normalmente estas cámaras suelen ser de sección transversal cuadrangular, aplicándose el campo acústico en la dirección normal a la circulación de la corriente de gases. La generación del campo acústico se realiza mediante transductores situados en una de las paredes de la cámara ocupando gran parte de su superficie para crear un campo lo más uniforme posible. Con objeto de crear campos de alta intensidad con un coste reducido de potencia se trabaja en condiciones de resonancia acústica de la cámara.

Para poder optimizar la distribución de transductores y la geometría de la cámara es conveniente disponer de un método numérico que permita realizar prediseños de manera rápida y económica antes de la construcción de los prototipos. Dicho método debe cubrir dos aspectos: el transductor y la cámara en si. En la actualidad el Método de los Elementos Finitos (MEF) ha sido aplicado con éxito para diseñar el transductor², presentándose dificultades a la hora de modelizar el campo acústico en la cámara.

La modelización del campo acústico en esta aplicación presenta dos problemas. De una parte, para que el tratamiento funcione, es preciso que el campo sea de alta intensidad, lo que provoca que las ecuaciones a resolver son las de la acústica no lineal. De otra, la alta relación entre las dimensiones de la cámara y la longitud de onda hace que los métodos de dominio (MEF y Diferencias Finitas) sean impensables, presentando incluso los de contorno serios problemas. Por otra parte, al ser comparables las dimensiones de las fuentes con las de la cámara, no es posible recurrir a una técnica de rayos, como se hace en acústica arquitectónica.

En este artículo se propone la utilización del Método de los Elementos de Contorno (MEC) mediante una división en regiones de la cámara de tratamiento, siendo el tamaño de las mismas adecuado para su resolución numérica. Las condiciones de unión entre las diferentes regiones se establecen a partir de impedancias calculadas desde una generalización de las de ondas planas.



Se ha aplicado el método a dos casos en 2D. En ambos la cámara es de dimensiones cuadradas de 0.5 m de lado, siendo una de sus paredes el excitador y el resto superficies rígidas. En el primero se ha supuesto que el transductor no se deforma en su movimiento, es decir, se comporta como un pistón rígido. En el segundo, por el contrario, se ha asumido una deformación de la superficie radiante. En los casos analizados se proponen las fórmulas apropiadas para la impedancia y se determinan criterios de convergencia, al compararse los resultados con soluciones analíticas conocidas.

FUNDAMENTO DEL MÉTODO

El método tiene su origen en la formación de un campo acústico plano y estacionario en la cámara cuando la excitación se mueve como un pistón rígido. Considérese una cámara 2D de forma rectangular y dimensiones $L_x \times L_y$, donde uno de los lados ($y=0$) sea la superficie vibrante, a la que se le impone una velocidad de vibración $u(t) = u_0 e^{j\omega t}$, tal como se muestra en la Figura 1. El campo de presiones puede construirse mediante la suma de dos ondas progresivas, una que se desplaza en la dirección positiva del eje Y (p_+) y otra en la negativa (p_-):

$$p_+ = A e^{-jk y} \quad p_- = B e^{jk y} \quad (1a, 1b)$$

Las impedancias acústicas asociadas con cada una de ellas serán:

$$z_+ = r c \quad z_- = -r c \quad (2a, 2b)$$

En consecuencia, las velocidades de las partículas vendrán dadas como:

$$u_+ = \frac{A}{r c} e^{-jk y} \quad u_- = \frac{-B}{r c} e^{jk y} \quad (3a, 3b)$$

Para resolver el problema se imponen las condiciones de contorno en la superficie radiante y en la pared final:

$$u(0) = u_0 \quad u(L_y) = 0 \quad (4a, 4b)$$

Tras algunas operaciones se obtiene:

$$p(y) = -j r c u_0 \frac{\cos[k(y - L_y)]}{\sin(k L_y)} \quad u(y) = -u_0 \frac{\sin[k(y - L_y)]}{\sin(k L_y)} \quad (5a, 5b)$$

$$z(y) = \frac{j r c}{\operatorname{tg}[k(y - L_y)]} \quad (5c)$$

donde $z(y)$ es la impedancia acústica total en cualquier plano $y = \text{cte}$ de la cámara.

El método planteado en esta comunicación consiste en dividir la cámara en varias regiones, como se sugiere en la Figura 2, de modo que éstas se resuelvan por separado, imponiendo como condiciones de contorno en los planos de cierre (a-a y b-b en la Figura 2) la impedancia acústica dada por la ecuación (5c).

El procedimiento de resolución propuesto puede parecer válido sólo para el caso de ondas planas. Como las superficies radiantes en la realidad flectan, el campo generado dejará de ser plano. Sin embargo, si la cámara se hace trabajar en condiciones de resonancia la impedancia acústica coincide razonablemente con la del caso



plano, debido a la supremacía del modo resonante. Se va a suponer que la superficie vibrante tiene una distribución de velocidades genérica $u(t) = u_0 f(x) e^{j \omega t}$. En esta ocasión se va a considerar la existencia de amortiguamiento, modelizado a partir del coeficiente α , de forma que la ecuación de Helmholtz pasa a ser:

$$\nabla^2 \mathbf{f} + (k^2 - j2\alpha k) \mathbf{f} = 0 \Leftrightarrow \nabla^2 \mathbf{f} + \hat{k}^2 \mathbf{f} = 0 \quad (6)$$

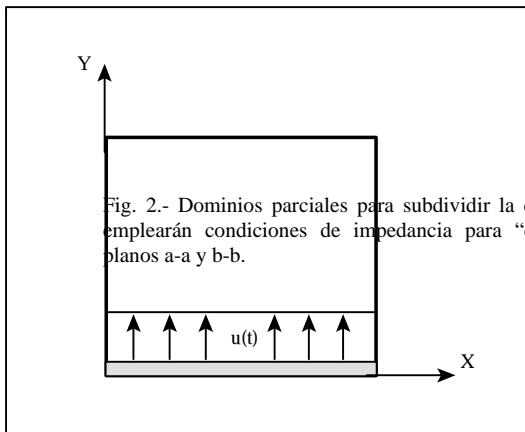


Fig. 1.- Cámara 2D modelizada. El excitador está situado en el plano $y=0$ vibrando con una velocidad $u(t)$.

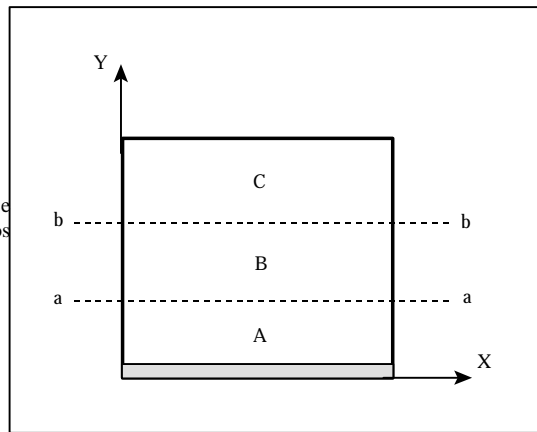


Fig. 2.- Dominios parciales para subdividir la cámara. Se emplearán condiciones de impedancia para "cerar" los planos a-a y b-b..

Tras aplicar el método de separación de variables y las condiciones de contorno en las superficies rígidas resulta:

$$p(x, y) = \sum_n A_n \cos\left[\frac{n \mathbf{p} x}{L_x}\right] \frac{\cos[\hat{k}_y (L_y - y)]}{\cos(\hat{k}_y L_y)} \quad (7a)$$

$$\hat{k}_y = \sqrt{\left(\frac{2 \mathbf{p}}{l}\right)^2 - \left(\frac{n \mathbf{p}}{L_x}\right)^2} - j2\alpha \left(\frac{2 \mathbf{p}}{l}\right) \quad (7b)$$

Imponiendo la condición de contorno en la superficie radiante se obtiene:

$$p(x, y) = -j r w u_0 \sum_n A'_n \frac{\cos[\hat{k}_y (L_y - y)]}{\hat{k}_y \operatorname{sen}(\hat{k}_y L_y)} \cos\left[\frac{n \mathbf{p} x}{L_x}\right] \quad (8a)$$

$$A'_n = \frac{\int_0^{L_x} f(x) \cos\left(\frac{npx}{L_x}\right) dx}{\int_0^{L_x} \cos^2\left(\frac{npx}{L_x}\right) dx} \quad (8b)$$

La componente Y de la velocidad será:

$$v_y = u_0 \sum_n A'_n \frac{\text{sen}\left[\hat{k}_y (L_y - y)\right]}{\text{sen}\left(\hat{k}_y L_y\right)} \cos\left[\frac{np x}{L_x}\right] \quad (9)$$

Por tanto, la impedancia acústica en la dirección Y resulta ser:

$$z_y = \frac{-j r w u_0 \sum_n A'_n \frac{\cos\left[\hat{k}_y (L_y - y)\right]}{\hat{k}_y \text{sen}\left(\hat{k}_y L_y\right)} \cos\left[\frac{np x}{L_x}\right]}{u_0 \sum_n A'_n \frac{\text{sen}\left[\hat{k}_y (L_y - y)\right]}{\text{sen}\left(\hat{k}_y L_y\right)} \cos\left[\frac{np x}{L_x}\right]} \quad (10)$$

Las expresiones (8), (9) y (10) ponen de manifiesto algo que ya se conocía, y es que el campo acústico, y por tanto la impedancia acústica no son planos en este caso, es decir, son funciones de X y de Y. Sin embargo, si se opera en condiciones resonantes de la cámara los sumatorios que aparecen en (9) se pueden reducir, de forma aproximada, al término resonante, con lo que la impedancia resulta:

$$z_y \approx \frac{r w}{j k_y \text{tg}\left[\hat{k}_y (L_y - y)\right]} \quad (11)$$

Como se ve, es una expresión completamente análoga al caso plano, salvo por dos circunstancias:

- El número de onda es el asociado a la dirección de propagación, por lo que depende del modo que se esté excitando en la cavidad y no sólo de la frecuencia de la excitación.
- La expresión (11) sólo es válida en condiciones de resonancia.

El procedimiento descrito anteriormente se ha implantado en el código QUADAPEH descrito en Domínguez³, aplicándose a varios casos. En todos ellos se ha resuelto el problema en las regiones tipo A, estableciendo la cota de cierre a $y=y_0$ y comparándose los resultados obtenidos con la solución analítica. También se ha utilizado el código SYSNOISE® con el radiador rígido. El medio considerado ha sido aire con $c = 343 \text{ m/s}$, $r = 1.3 \text{ kg/m}^3$ y $a = 0.0056 \text{ m}^{-1}$ (en el caso deformado). Los elementos utilizados han sido cuadráticos isoparamétricos en ambos códigos.

RESULTADOS CON RADIADOR RÍGIDO

Los resultados obtenidos en esta configuración han permitido establecer el margen de valores válidos para la impedancia de cierre⁴. Se ha comprobado que es preciso que el valor de dicha impedancia sea bastante superior a la del medio. Este fenómeno ya fue comprobado por los autores en otras situaciones en las que se requería un acoplamiento entre diferentes medios⁵. Como ya se justificó en un anterior trabajo⁴, este hecho no es



demasiado preocupante debido a que a las frecuencias de trabajo habituales existen varios planos de impedancia infinita en las cámaras de dimensiones empleadas. En la Figura 3-Caso1 se muestran los resultados obtenidos mediante el código QUADAPEH para 1 kHz. En la Figura 3-Caso2 se hace lo propio pero con el código SYSNOISE®. Como se ve, éste último requiere valores de impedancia mucho más elevados que el primero (del orden de 1 MRayl para conseguir un buen acuerdo). En la Tabla 1 se dan detalles sobre la discretización empleada en estos casos, siendo destacable que la elevada relación $\lambda/\Delta L$ no se requiere por problemas de convergencia, sino porque los puntos internos se toman automáticamente del mallado del contorno, por lo que para conseguir una alta resolución es necesaria una discretización muy fina.

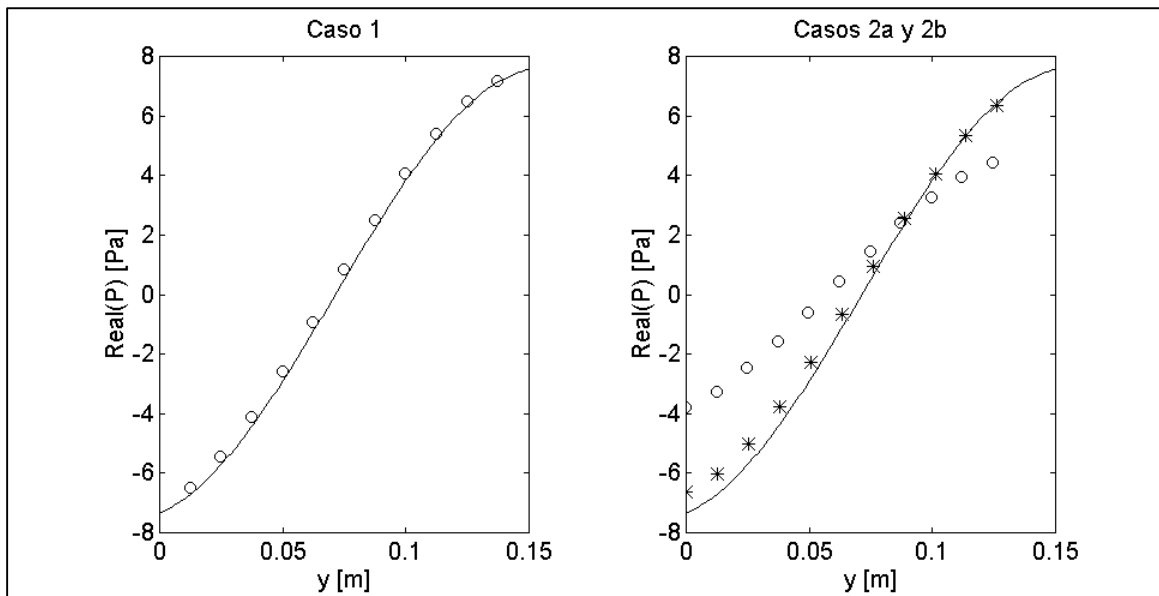


Fig. 3.- Resultados con radiador rígido. El Caso 1 se obtuvo con el código QUADAPEH modificado, mientras que los Casos 2a y 2b con SYSNOISE. El caso 2a (o) se hizo con baja impedancia de cierre y el 2b (*) con una impedancia muy elevada (ver Tabla 1). En ambas figuras la línea continua representa la solución analítica

	Caso 1	Caso 2a	Caso 2b
y_0	0.15	0.324	0.3285
z	-j 3458.3123	-j 5397.0191	-j 1217087.239
N_y	6	13	13
N_x	20	20	20
$\lambda / \Delta L$	13.7	13.8	13.6

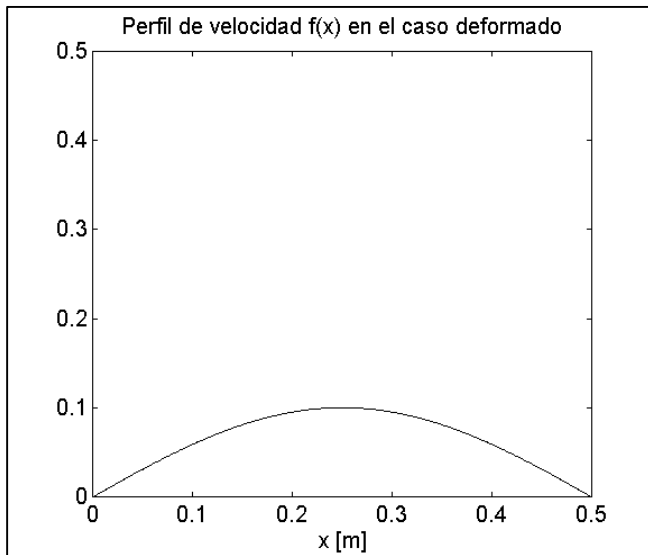
Tabla 1.- Parámetros empleados en los resultados con radiador rígido (figura 3).

RESULTADOS CON EL RADIDADOR DEFORMADO

Con objeto de simular situaciones más realistas se ha considerado que la superficie radiante puede deformarse, lo que se traduciría en que el perfil de velocidades ya no sería plano, sino variable a lo largo de la dirección X. El perfil que se ha supuesto para la velocidad de esta superficie aparece representado en la Figura 4, junto con su expresión matemática.

La idea del procedimiento propuesto en esta comunicación se basa en que estando en condiciones de resonancia acústica en la cámara los sumatorios que aparecen tanto en el numerador como en el denominador de la expresión de la impedancia (10) se reducen sólo al término resonante, con lo que se simplifican, produciendo así una expresión independiente de los coeficientes A'_n y calculable, por tanto, sin necesidad de conocerlos. Así, el requerimiento para poder aplicar este método es elegir una frecuencia de excitación de modo que la cámara sea resonante y, además, que los órdenes de los modos que se exciten sean únicos, con objeto de que sólo sobreviva un término en el numerador y denominador de la expresión (10). Es decir, se trata de elegir una frecuencia tal que sólo se alcance con una combinación $[n_x, n_y]$ en la ecuación (12), donde λ representa la longitud de onda.

$$\left(\frac{2p}{l}\right)^2 = \left(\frac{n_x p}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y p}{L_y}\right)^2 \quad (12)$$



$$f(x) = \text{sen}\left(\frac{p x}{L_x}\right)$$

$$A'_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impar} \\ \frac{2}{-4} & \text{si } n = 0 \\ \frac{p}{p(n-1)(n+1)} & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

Fig. 4.- Perfil de velocidad supuesto para el radiador deformado

En la Figura 5-Caso3 se muestran los resultados obtenidos en un caso en el que se cumplen plenamente los requisitos descritos anteriormente. La frecuencia elegida (20682.64 Hz) se corresponde, en una cámara de 0.5 x 0.5 m con una frecuencia propia de índices $n_x = 6 / n_y = 60$. En la Figura 5-Caso4 se muestran los resultados obtenidos a una frecuencia de 20967.94 Hz, que se corresponde con una frecuencia propia alcanzable desde varios índices: $n_x = 4 / n_y = 61$ ó $n_x = 16 / n_y = 59$. Según esto, las condiciones de aplicación del procedimiento no se respetan plenamente, pese a lo cual los resultados mostrados son bastante buenos. En la Tabla 2 se dan los detalles de la discretización empleada en ambos casos. Nótese como ahora la relación $\lambda/\Delta L$ tiene un valor más razonable que en anteriores ejecuciones, debido a que al se la malla más fina por trabajar ahora a más alta frecuencia se consigue una resolución suficiente.

	Caso 3	Caso 4
y_0	0.05014	0.049322
z	406.6058 + j 8463.2069	390.3819 + j 8285.4031
N_y	12	12
N_x	120	120
$\lambda / \Delta L$	4	4



Tabla 2.- Parámetros empleados en los resultados con radiador deformado (figura 5).

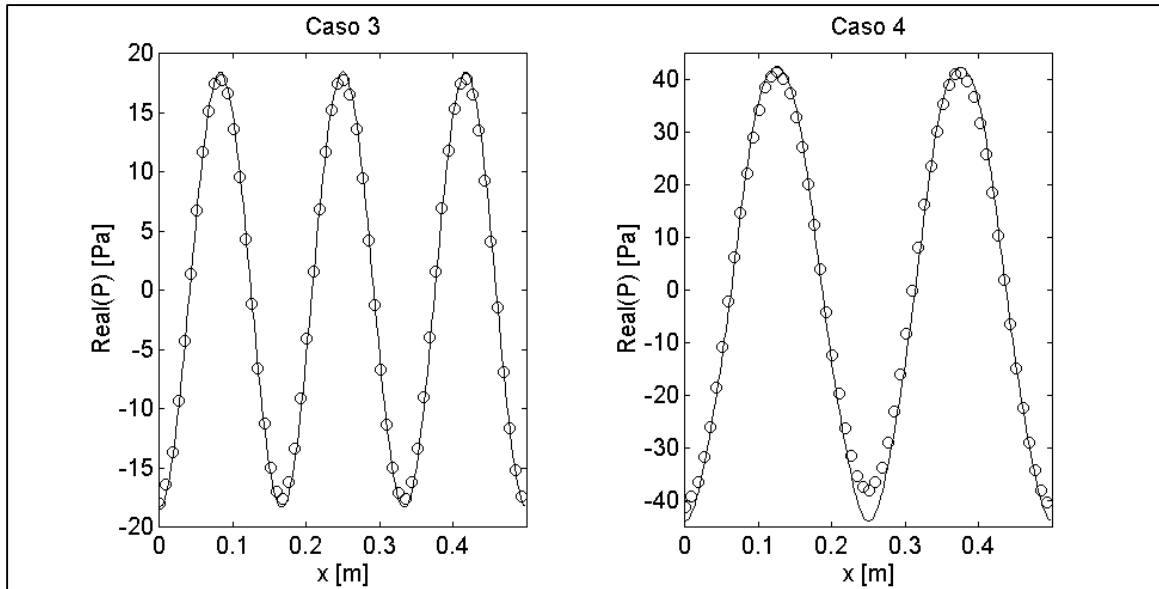


Fig. 5.- Resultados con radiador deformado. El Caso 3 corresponde a una frecuencia propia con una descomposición única de índices (un sólo término en los sumatorios), mientras que el Caso 4 a una descomposición múltiple (dos términos en los sumatorios)

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un procedimiento que posibilita la aplicación del MEC a la determinación de campos acústicos en cámaras cerradas cuando la relación de tamaño frente a longitud de onda es muy grande y las fuentes no se pueden considerar puntuales. El procedimiento surge a partir de la impedancia de ondas planas estacionarias en cavidades, las cuales se producen cuando las superficies vibrantes son consideradas rígidas. Sin embargo, se ha comprobado que dicho procedimiento puede ser generalizado al caso de superficies radiantes deformadas, siempre que se consideren condiciones resonantes de trabajo. Se presentan resultados obtenidos en configuraciones 2D, tanto con radiador rígido como deformado, obteniéndose un excelente acuerdo con las soluciones analíticas.

Las dos limitaciones encontradas al procedimiento son asumibles dentro de las condiciones de trabajo habituales. La primera de ellas consiste en tener que ajustar la impedancia acústica de los planos de cierre a valores muy altos. Debido a las altas frecuencias de trabajo esta condición es fácil de alcanzar pues existen muchos planos de impedancia infinita en las cámaras de tamaños habituales, habiendo, por tanto, gran libertad para elegir el citado plano. La segunda consiste en la necesidad de que la frecuencia de trabajo sea una de las propias de la cavidad, lo cual es habitual, con objeto de consumir la mínima energía para la excitación de las superficies radiantes. Por todo ello, el procedimiento aquí descrito abre una nueva vía para la aplicación del MEC a estas configuraciones, permitiendo así la optimización del campo acústico en las cámaras.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se realizó dentro del proyecto *Development of deliquoring method enhanced by electric and*



acoustic force fields dentro del cual D. José Ignacio Linares Hurtado tuvo la condición de doctor vinculado al Instituto de Acústica de Madrid. Las simulaciones llevadas a cabo con el código SYSNOISE® fueron realizadas por D. David Gil Alías gracias a un permiso de estancia en el citado centro.

REFERENCIAS

1. J. A. Gallego, "Nuevas tecnologías ultrasónicas de potencia.", *Revista de Acústica*, **29**, 45-53 (1998).
2. F. Vázquez, G. Rodríguez, "Nuevos avances en el desarrollo de transductores macrosónicos de placa escalonada.", *Revista de Acústica*, **29**, 387-390 (1998).
3. J. Domínguez, "Boundary elements in Dynamics", Southampton Computational Mechanics Publications and London Elsevier (1993).
4. J. I. Linares, "Determinación de campos acústicos de alta frecuencia en cámaras resonantes de grandes dimensiones mediante el empleo de condiciones de impedancia en el método de los elementos de contorno.", IV Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería (1999).
5. J. I. Linares, "Aplicación del método de los elementos de contorno a la difusión de ondas acústicas por estructuras cilíndricas macizas de longitud finita inmersas en un fluido", III Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería (1996).

