

Ondas de gran amplitud en una cavidad cilíndrica: modelo de segundo orden

C. Campos Pozuelo

Departamento de Señales, Sistemas y Tecnologías Ultrasónicas, Instituto de Acústica, CSIC, Serrano 144, 28006 Madrid

Introducción

El campo acústico confinado en una cavidad de dimensiones grandes respecto a la longitud de onda, constituye uno de los problemas más importantes y a la vez más intrincados de la acústica tanto desde un punto de vista básico como aplicado. Estos problemas han sido ampliamente estudiados desde hace tiempo, aportándose soluciones analíticas sólo en casos muy simplificados [1] (onda plana, amplitudes infinitesimales, etc.), lo que ha permitido constituir las bases fundamentales de su comprensión física. Sin embargo la solución precisa de los problemas concretos que se plantean en las diferentes aplicaciones, en las que la estructura radiante y la geometría del recinto son complejas, se presenta prácticamente inalcanzable por los métodos clásicos. La única forma de abordar estas situaciones es mediante métodos de cálculo numérico.

De hecho en las aplicaciones de los ultrasonidos de potencia en procesos industriales la efectividad del sistema depende fundamentalmente de la distribución del campo en la cámara de tratamiento. Dichas aplicaciones están basadas en efectos no lineales producidos por variaciones de presión de amplitud finita. El interés de un estudio de la distribución del campo no lineal en cámaras de diferentes geometrías es, por tanto, evidente.

La autora ha desarrollado un procedimiento numérico basado en el método de los elementos finitos y en la teoría de perturbaciones que permite el modelado de ondas acústicas de gran amplitud. El método ha sido validado tanto analítica como experimentalmente para ondas progresivas y ha mostrado tener una gran versatilidad [2]. De hecho con este nuevo procedimiento se ha podido modelar el campo acústico no lineal generado por transductores reales de geometría compleja. Se pretende en el presente trabajo aplicar dicho método al estudio de campos acústicos no lineales confinados en cavidades.

Los trabajos teóricos y experimentales existentes en la literatura sobre ondas estacionarias de amplitud finita en fluidos se refieren a estudios unidimensionales [3,4]. El objetivo del trabajo que aquí se presenta es desarrollar un análisis válido para cavidades bi o tridimensionales acercándonos así a los casos de interés práctico.

Se presenta aquí el estudio de un tubo cilíndrico en el que ninguna de las dimensiones características es despreciable frente a la longitud de onda. Se comienza con el cálculo de los modos propios del tubo. A continuación se estudia la forma de vibración de el tubo considerando dos tipos diferentes de excitación: plana y puntual. Las diferencias entre los resultados obtenidos en ambos casos nos indica la importancia que en un sistema real tiene el conjunto transductor-cámara ya que de él dependen tanto la distribución del campo obtenido como la distorsión de la onda.

Método

Como se ha señalado en la introducción el procedimiento desarrollado se basa en el método de elementos finitos. Se trata de un estudio de segundo orden y se ha desarrollado en base al tratamiento mediante

aproximaciones sucesivas [5] de una ecuación parabólica. La ecuación de ondas considerada es la siguiente:

$$-\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \nabla^2 p = -\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} \quad (1)$$

donde p es la presión acústica, c_0 es la velocidad de propagación en condiciones lineales, ρ_0 la densidad del estado inicial y β el parámetro de no linealidad del medio de propagación.

En el método de las aproximaciones sucesivas se asume como solución la correspondiente al problema lineal (no perturbado) más una pequeña perturbación de segundo orden, es decir [5]:

$$p = p_1 + p_2 \quad (2)$$

donde p_1 es la solución del problema lineal

$$-\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \nabla^2 p_1 = 0 \quad (3)$$

sustituyendo (3) en (1) y teniendo en cuenta (2) obtenemos,

$$-\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} + \nabla^2 p_2 = -\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p_1^2}{\partial t^2} \quad (4)$$

en donde todos los términos de orden mayor o igual que tres han sido despreciados.

Suponiendo ahora excitación armónica, la ecuación (4) se puede escribir

$$\frac{4\omega^2}{c_0^2} p_2 + \nabla^2 p_2 = -\frac{2\omega^2\beta}{\rho_0 c_0^4} p_1^2 \quad (5)$$

donde hemos supuesto $p_1 = e^{j\omega t} P_1$ y $p_2 = e^{j2\omega t} P_2$. De esta forma la ecuación parabólica (1) se reduce a la ecuación lineal no-homogénea (5) que es fácilmente tratable por el método de los elementos finitos. Este método no se detallará aquí ya que existen numerosas referencias donde se puede encontrar descripción detallada del mismo [6]. Tan solo especificaremos que tras aplicar el principio variacional y discretizar la ecuación, se obtiene la siguiente ecuación

$$[H] - 4\omega^2 [M] [P_2] = [\rho c^2 \Psi] + [R_B] \quad (6)$$

donde la contribución del término no-lineal queda representada de forma matricial por

$$R_B = \frac{2\beta\omega^2}{c_0^2} \sum_e \int_{\Omega_e} N^e N^{eT} P_1^e N^{eT} P_1^e d\Omega_e \quad (7)$$

Análisis numérico del campo estacionario no lineal en cavidades cilíndricas. Resultados

Comenzamos este estudio por el análisis modal de una cavidad cilíndrica de dimensiones $L=4.33$ cm y $a=9.09$ cm (ver Figura 1). Los cuatro primeros modos propios y sus correspondientes distribuciones de campo se presentan en la Figura 2. Un análisis más detallado se lleva a cabo en torno al modo nº 4, donde se observan resonancias tanto radiales como a lo largo del eje de simetría. Empezamos a acercarnos al caso práctico analizando la influencia de la excitación. Así en la Figura 3 mostramos la distribución de campo en el tubo excitando a la frecuencia del modo 4, a) con una onda plana perpendicular al eje z y b) con una fuente puntual. Vemos que, para estos dos casos extremos, tenemos una onda plana si la excitación es plana y la distribución del modo propio correspondiente si excitamos con una fuente puntual.

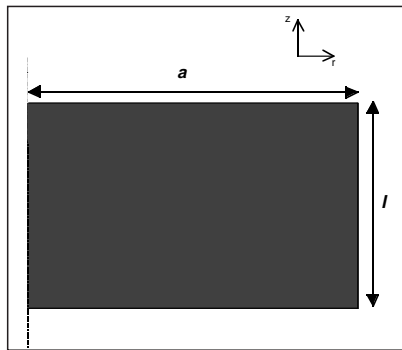


Figura 1. Geometría genérica de las cavidades analizadas

Analizamos los dos casos presentados en la Figura 3 en el caso no lineal y mostramos en la Figura 4 el segundo armónico generado en ambos casos.

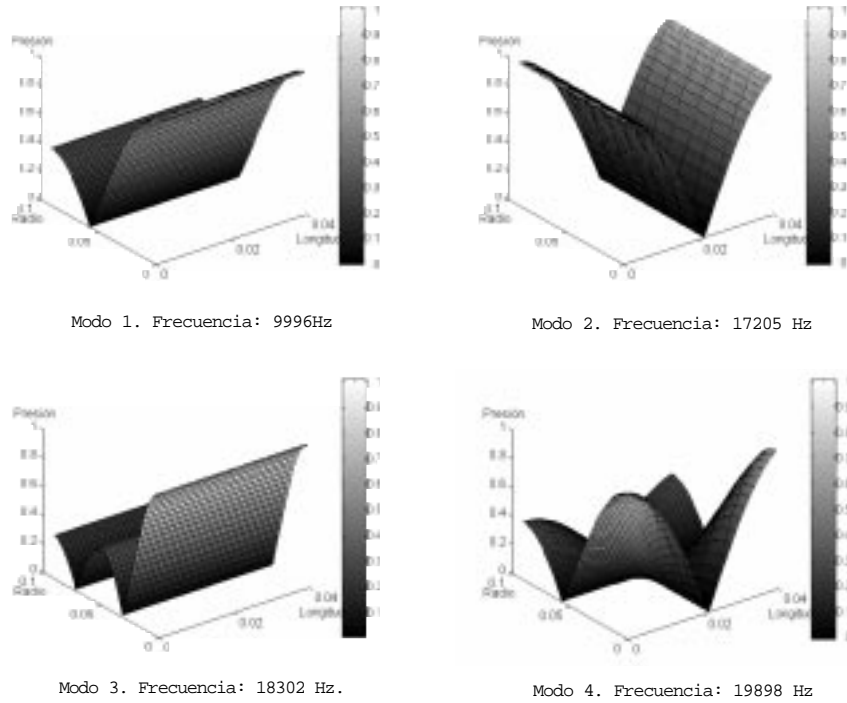


Figura 2. Cuatro primeros modos de resonancia del tubo de la Figura 1.

Nótese que para excitación plana (Figura 4a), el segundo armónico mantiene el frente de ondas plano, es decir la onda distorsionada sigue siendo una onda plana. El segundo armónico presenta un máximo de presión en el nodo de presión del fundamental, mientras que las líneas nodales de este segundo armónico corresponden a zonas donde el fundamental no se anula. Esto indica que el comportamiento no lineal del fluido, visible cuando se trabaja con ondas de gran amplitud, conlleva la desaparición del nodo de presión del tubo resonante. Como es bien sabido, en el caso más conocido de una onda plana progresiva la distorsión de la onda crece a medida que aumenta la distancia a la fuente. Vemos aquí que, en cambio, cuando se trata de una onda estacionaria la distorsión viene determinada por la distribución del fundamental y la geometría del tubo, siendo en este caso máxima la distorsión en el extremo del tubo más próximo a la fuente.

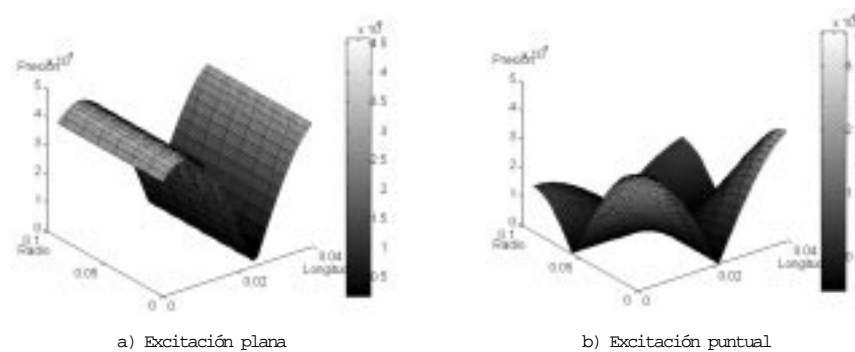


Figura 3. Distribución de presiones a la frecuencia del fundamental. Frecuencia de excitación: 19898.

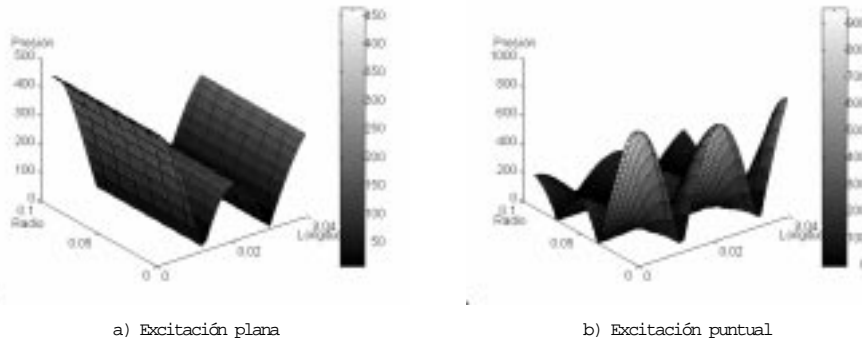


Figura 4. Distribución de presiones a la frecuencia del segundo armónico. Frecuencia de excitación:

Cuando se considera excitación con una fuente acústica puntual, para el segundo armónico se obtiene el resultado que se muestra en la Figura 4 b). Obsérvese que, de nuevo, las líneas nodales del fundamental no coinciden con las del segundo armónico. Sin embargo existen algunos puntos en los que tanto el fundamental como el segundo armónico se anulan (nodos de presión). Puede observarse que la concentración de energía en el eje de simetría, característica de la resonancia radial, que se observa en el fundamental (Figura 3b) es mucho más acusada para el segundo armónico.

Conclusiones

Se ha presentado un estudio bidimensional del campo acústico no lineal generado en una cavidad por ondas ultrasónicas de amplitud finita. Como característica general se ha observado que la distribución del campo acústico no lineal (fundamental y segundo armónico) depende de la geometría del tubo y de la forma de excitación. El estudio se ha llevado a cabo mediante el código ATILA, código de elementos finitos que ha sido modificado por la autora, extendiéndolo al campo de la modelización no lineal. Los resultados obtenidos abren muchas posibilidades para el estudio de problemas concretos que aparecen en los sistemas de procesamiento ultrasónico y, en general, en los problemas acústicos en conductos.

Agradecimientos

Los autores agradecen al Laboratorio de Acústica del ISEN por permitirles la utilización del código ATILA para la realización de este trabajo. Esta investigación ha sido financiada por un contrato del CSIC del Programa de Contratación temporal de Investigadores. Este trabajo se ha desarrollado en el marco de los Proyectos de investigación CICYT-AMB96-A211-CO2 and BRITE/EURAM BRPR-CT96-0157.

Referencias

1. P. M. Morse, "Vibration and Sound" Acoustical Society of America. (1981)
2. C. Campos-Pozuelo, B. Dubus and J.A. Gallego-Juárez, "Finite element analysis of the nonlinear propagation of high-intensity acoustic waves". Enviado para su publicación en J. Acoust. Soc. Am.
3. Dah-You Maa and Ke Liu, "Nonlinear standing waves: Theory and experiments" J. Acoust. Soc. Am., Vol. 98 (5) (1995)
4. W. Chester, "Resonant oscillations in closed tubes" Journal of fluid mechanics, Vol. 18 (90) (1964)
5. C. Campos-Pozuelo and J.A. Gallego-Juárez, "Finite amplitude standing waves in metallic rods", J. Acoust. Soc. Am., Vol. 97 (2), (1995)
6. O. C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method" Third Edition (ed. McGraw-Hill Book Company, London) (1977)