RUIDO EN LAS GRANDES CIUDADES

NOISE IN METROPOLITAN CITIES

Madrid, 23 al 25 de abril, 1991

APLICACIÓN DE VENTANAS ESPECTRALES A MODELOS DE RUIDO

M.D.SÁNCHEZ MUÑOZ[x] C.SANTISTEBAN[xx]

x *Dpto Bioestadística. Facultad de Medicina.* U.Complutense
xx Dpto Metodología .Facultad de Psicología. U.Complutense

INTRODUCCÍON

Es conocido en Análisis Espectral, el error que se comete al aplicar el espectro de potencia de Fourier a señales de ruido ,pués estimado el espectro muestra C_{XX} en un modelo de ruido blanco Gaussiano ,se obtiene que al aumentar el valor de N ,aumenta tambien el valor de la varianza, por lo que el espectro muestra presenta una cierta variabilidad o fluctuacíon. Para evitar estas fluctuaciones y obtener el espectro de ruido más preciso, es necesario buscar el espectro mejorado , haciendo una correccíon del espectro muestra C_{XX} . Cuanto mayor sea la suavizacion en la correccíon del espectro muestra , menor es la varianza, pero mayor es el sesgo.Hay que lograr un equilibrio entre ambos,es decir la varianza mínima para un sesgo pequeño.

Hasta el momento se han venido utilizando distintos modelos de estimadores eficientes.Nuestro interés se centra en el mètodo basado en la utilizacion de ventanas espectrales por encontrarlos de facil aplicaciòn ,frente a resultados interesantes.

Presentamos un estudio comparativo de la aplicacion de diferentes tipos de ventanas espectrales tales como la de Bartlett, Tukey y Parzen así como la ventana cerrada a la estimacíon del mejor espectro teòrico en modelos de ruido obteniendo conclusiones sobre la cnveniencia deutilizar un tipo u otro ,así como sobre el estudio y la variacion del sesgo que se produce.

CONSTRUCCÍON Y ANÁLISIS

Se parte del espectro de potencia dado por Fourier según la expresión:

$$T_{XX}(f) = \lim E(C_{XX}) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{XX}(u)\, e^{-i2\pi fu}\, du$$

contruido a partir de la tranformada de Fourier de la funcíon de autocovarianza.

Se aplica la correccíon de estimadores espectrales introduciendo la longitud de ventana w(u) ,con lo que el estimador corregido tiene la siguiente expresíon:

$$C_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w(u)\, c_{xx}(u)\, e^{-i2\pi fu}\, du$$

Estas ventanas són simétricas respecto del eje vertical y tiene ceros en los valores de f= 1 M 2 M 3 M
El ancho de ventana es 2 M,y corresponde a la distancia entre los dos ceros más próximos alrrededor del origen.
Se observa que el sesgo está dado en funcion de las derivadas primera y segunda del espectro de potencia en la frecuencia f .En la proximidad de los máximos la segunda derivada es negativa ,por lo que el sesgo es negativo y el máximo t tiende a subestimarse ; por el contrario si esta derivada es positiva y esto sucede en las proximidades del mínimo el sesgo es positivo y los mínimos pueden ser sobreestimados.
El sesgo en la ventana de Bartlett, es del orden de 1 M yeste sesgo se reduce cuando M aumenta ,es decir cuando el ancho de ventana se reduce.
Para el mismo punto de truncamiento Mla ventana de Parzen tiene un sesgo mas largo que la ventana de Tukey,esto es debido a que la ventana de Parzen es más ancha que la ventana de Tukey.
El estimador espectral de la ventana de Parzen tiene una varianza menor que el estimador espectral de Tukey.
Aplicadas estas ventanas a un modelo autorregresivo de primer orden dado por la expresíon:

$$X_t - \mu = \alpha_1 X_{t-1} + Z_t$$

donde Z_t es la señal de ruido de entrada al sistema ,.
La funcion de densidad espectral $T_{xx}(f)$
y la funcíon de densidad corregida media ,utilizando la ventana de Tukey muestran que el sesgo varía con la frecuencia además de variar al modificar el ancho de banda L.Para un ancho de banda de L=4 ,la funcíon de densidad espectral suavizada media es completamente sesgada, especialmente cerca del máximo f que quedq subestimado.
Si tomamos L=8 la estimacíon se considera suficiente ,es decir el sesgo es pequeño .Si tomamos L=16 se consigue una considerable reduccíon en el rango.En general el sesgo disminuye ,cuando disminuye L.

Para el modelo autorregresivo de segundo orden, dado por

$$X_t - \mu = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + Z_t$$

se observa quesi L es demasiado pequeño y esto se produce para valores de L menores que ocho, la estimacíon no detalla el máximo en la frecuencia f.
Si L toma valores de 24 ,aparece un segmento en los alrrededores del máximo , esto es debido al gran aumento de la varianza y con ello se oculta el valor verdadero del espectro, por lo que no deben tomarse estos valores salvo que se tenga informacíon por otro procedimiento del espectro.
Igualmente ocurre cuando Ltoma valores mayores que cuarenta

en cuyo caso aparecen dos máximos ofreciendo una informacíon sobre el espectro estimado.
De lo anterior deducimos la importancia de elegir un ancho de banda adecuado.Los espectros corregidos ,están realizados en el punto de truncamiento L=2.
Para la ventana de Bartlett el sesgo está expresado en fun cíon de la primera derivada.Se observa que esta derivada es pequeña en el entorno del máximo y aumenta notablemente cuando el espectro tiene una gran inclinacíon .
Al disminuir la frecuencia ,se tiene un gran sesgo y se hace mayor y mas detallado el número de ondulaciones.En los puntos próximos al máximo el sesgo es pequeño.
En la estimacíon basada en las ventanas de Tukey y Parcen el término principal para el sesgo ,depende de la derivada segunda del espectro y esta es pequeña en la regíon donde el espectro es lineal y relativamente grande cerca del máxi mo.
El valor esperado del estimador espectral corregido medio está dado por:

$$E(\overline{C_{xx}}) = \int_{-\infty}^{\infty} W(g)\ E(\ C_{xx}(f-g)\ )\ dg =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} W(g)\ T_{xx}(f-g)dg = \overline{T_{xx}(f)}$$

A $T_{xx}(f)$;se le llama espectro medio corregido.
El sesgo se calcula utilizando la ventana espectral ,y partiendo de la definicíon de sesgo :

$$B(f)= E(\overline{C_{xx}}) - T_{xx}(f) = \overline{T_{xx}(f)} - T_{xx}(f)$$

que en general toma el valor de:

$$B(f)= \int_{-\infty}^{\infty} (w(u)-1)\ g(u)\ e^{-i2\pi fu}\ du$$

donde w(u) es la longitud de ventana
Estas estimaciones están hechas para un recorrido de la señal suficientemente grande.
Cuando se ha de estudiar una característica específicamente significativa del espectro se utiliza la técnica de ventana cerrada pués es la que ofrece mas detalles.La utili zacíon de esta ventana implica una computacíon espectral es timada corregida , que tiene un amplio ancho de banda ,a partir de la cual se utilizan progresivamente pequeños anchos de banda .Estos estrechamientos progresivos permiten revelar los máximos detalles en el espectro sin cambiar la estabilidad . Al efectuar cambios largos en el ancho de ban da ,se producen los mejores y más interesantes cambios en el espectro .
en los modelos de primer orden, para un rango fijado ,se obtiene la estimacíon más satisfactoría ,incrementando el ancho de banda desde Ligual a cuatro hasta L igual a dieciseis.
La técnica de ventana cerrada ,transforma el espectro para valores estables ,es decir , que aplicada a un modelo de segundo orden la estimacíon es relativamente uniforme ,aunque resulta algo dificultoso averiguar y concluir si el cam bio de ancho de banda hasta conseguir otro triple o cuadruple ,es debido a la inéstabilidad , o a la apariencia más detallada en el espectro .
El principal objetivo que nos proponiamos al utilizar este tipo de ventana fué el de ayudarnos en un mejor discernimiento físico en el proceso de estimacíon e interpretacíon

espectral.

CONCLUSIONES

De lo expuesto anteriormente concluimos diciendo que:
.- Para un punto de truncamiento dado M ;el sesgo es pequeño ,y está concentrado alrededor de cero.En general la ventana espectral tiene la mayor concentracion alrededor de la frecuencia central
.- El ancho de banda de la ventana espectral da una medida de la concentracíon de la ventana.
. - Disminuir el ancho de la ventana espectral W(f) permite valores del espectro de potencia T_{XX} para frecuencias muy distantes de f ,contribuyendo a aumentar el sesgo.
. - Comparadas las ventanas de Parzen de Bartlett y de Tuke y ,para un mismo ancho de banda ,el espectro corregido es CASI IDÉNTICO.
. -La comparacion entre las varianzas de los correspondientes estimadores en los diferentes tipos de ventanas nos per miten escribir que el producto de la varianza por el ancho de banda es constante , de lo que deducimos que si dos esti madores tienen igual varianza sus anchos de banda són iguales .
. - Finalmente concluimos afirmando que lo más importante en la estimacíon del mejor espectro para señales de ruido NO es la eleccíon del tipo de VENTANA,sino la eleccíon del ancho de banda.

BIBLIOGRAFÍA

Ronald.L.F. (1987) .Signal Analysys and Estimation, John Wiley. SONS:

Priestley .M. B. (1981). Spectral Analysis and time series. Volumen I yII :Acad. Press .London.

Pagano.M. (1979) .Estimation of models autorregressive signal plus white noise. The Annals of Statist. 2, 1