



VIBRACIÓN LONGITUDINAL DE UNA BARRA ESBELTA LIBRE. MÉTODO DE RITZ SIN Y CON CONDICIONES DE CONTORNO

PACS: 43.40.At

F. Nieves*, A. Bayón** y F. Gascón***

*ETS Arquitectura. Univ. Sevilla
Reina Mercedes 2. 41012 Sevilla
E-mail: nieves@us.es

**ETS Ingenieros de Minas. Univ. Politécnica de Madrid
Ríos Rosas 21. 28003 Madrid
E-mail: abayon@dfarn.upm.es

***ETS Arquitectura. Univ. Sevilla
Reina Mercedes 2. 41012 Sevilla
E-mail: fgascon@us.es

ABSTRACT

In the dynamic study of an elastic system by the displacement variational method is not required to consider the stress boundary conditions. The effect of including such stress requirements in the calculation of the eigenvalues and eigenvectors is here analysed for the elementary case of a slender rod vibrating freely in its longitudinal modes. The values for the natural frequencies determined from the elementary theory, the Ritz method, either considering or ignoring the stress conditions, and the experimental results, obtained by speckle interferometry, are compared.

RESUMEN

En el estudio dinámico de un sistema elástico por el método variacional de los desplazamientos no es necesaria la introducción de las condiciones de contorno de tensión. Se analiza el resultado de introducir dichas condiciones de tensión en el cálculo de las frecuencias propias y autovectores en el caso elemental de una barra esbelta vibrando libremente en sus modos longitudinales. Se comparan los resultados de aplicar la teoría elemental, el método de Ritz sin dichas condiciones de contorno o con ellas y los resultados experimentales obtenidos por interferometría de speckle.

INTRODUCCIÓN

El movimiento de un sistema elástico, isótropo y lineal se rige por la ecuación fundamental de la dinámica y la ley de Hooke. Se puede escribir una ecuación única, ecuación de Navier, donde aparezcan solamente los desplazamientos, si estos verifican ciertas condiciones de continuidad. La solución de la ecuación es única para deformaciones pequeñas y con condiciones iniciales y de contorno adecuadas. Éstas son que las tensiones sean funciones prefijadas de la posición y del tiempo sobre una parte del contorno del sistema y que los desplazamientos sean funciones dadas sobre el resto del contorno. La solución debe verificar dichas condiciones.

El método variacional aplicado al cálculo de los desplazamientos es menos exigente en cuanto a la continuidad del desplazamiento y además solo debe satisfacer los desplazamientos impuestos a los puntos de la frontera. Esta formulación se llama débil^{2,3}.

FORMULACIÓN DE RITZ

Aunque no se precisen en el planteamiento del problema las condiciones de tensión en el contorno del sistema es evidente que la solución debe verificarlas. Por eso es de interés el conocer la influencia en la solución al tenerlas en cuenta en el planteamiento del problema o no tenerlas en cuenta. Este interés solo se planteará en soluciones aproximadas, pues es evidente que en las soluciones exactas los resultados serán idénticos. Como los problemas elásticos con solución analítica exacta se pueden contar con los dedos de una mano, se acude a las soluciones aproximadas, de ahí el interés del problema planteado.

El ejemplo que se va a analizar es elemental, pero suficientemente ilustrativo. Este es el caso de una barra elástica muy esbelta, de longitud L , módulo de Young E , situada sobre el eje OX , con desplazamientos en la dirección de la propia barra y libre en ambos extremos. La barra es tan delgada que no son conmensurables los desplazamientos perpendiculares al eje. Sea el desplazamiento esperado

$$u = U(x)\sin(\omega t). \quad (1)$$

La única componente del tensor deformación no nula es la

$$\mathbf{e} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dU(x)}{dx}\sin(\omega t). \quad (2)$$

La ley de Hooke da una tensión normal en la sección recta

$$p = E\mathbf{e}, \quad (3)$$

donde E es el módulo de Young.

El potencial elástico de la barra, de este sistema conservativo

$$V = \frac{1}{2}ES\sin^2(\omega t) \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{dU(x)}{dx} \right)^2 dx \quad (4)$$

y la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}\mathbf{r}S\omega^2 \cos^2(\omega t) \int_{-L/2}^{L/2} U^2(x)dx, \quad (5)$$

donde S es el área de la sección de la barra y \mathbf{r} su densidad. El producto de la integral de la lagrangiana en un periodo del movimiento por la cantidad $\frac{2\omega}{\mathbf{p}SE}$ da

$$R = \frac{2\omega}{\mathbf{p}SE} \int_0^{2\pi/\omega} (T-V)dt = \frac{\mathbf{r}\omega^2}{E} \int_{-L/2}^{L/2} U^2(x)dx - \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{dU(x)}{dx} \right)^2 dx \quad (6)$$

SOLUCIONES SIMÉTRICAS

A partir de aquí solo se analizan las soluciones simétricas, o lo que es igual, que $U(x)$ sea una función impar de x . Se consideran los siguientes casos:

a) Se elige como solución una serie de potencias de la forma

$$U(x) = \sum_{i=1}^I A_i x^i. \quad (7)$$

Se aplica el método de Ritz a esta solución. Como R debe ser mínima, sus derivadas parciales respecto de los coeficientes A_i deben ser nulas, es decir

$$\frac{\partial R}{\partial A_i} = 0 \quad (8)$$

Este sistema de $(I+1)/2$ ecuaciones lineales en las incógnitas A_i solo tiene solución si el determinante de los coeficientes de las incógnitas es nulo. Cada uno de los autovalores $B = \frac{r w^2}{E}$ proporciona un autovector $[A_i]$ o modo propio de vibración.

b) En el segundo método de cálculo, se aplica la condición de que la tensión es nula en los extremos de la barra, es decir,

$$\frac{dU(x)}{dx} = 0 \quad \forall \quad x = \pm L/2. \quad (9)$$

Sustituyendo la (7) en la (9) y despejando de esta última ecuación una incógnita, por ejemplo la A_3 , y sustituyéndola en la (7) resulta

$$U(x) = \sum_{j=1,5,7..}^I \left(x^j - \frac{j}{3} \left(\frac{L}{2} \right)^{j-3} x^3 \right) A_j. \quad (10)$$

Nótese que esta ecuación tiene una incógnita menos que la (7).

c) Según la teoría elemental de barras esbeltas, debe ser

$$U = A \operatorname{sen} \left(\frac{2n+1}{L} p x \right) \quad (11)$$

APLICACIÓN

La barra estudiada es de acero DIN 1.4031 cuyo $E=199 \cdot 10^9$ Pa, densidad 7884 kg/m^3 y longitud $L=0.320$ m.

a') Estudiemos la solución

$$U(x) = A_1 x + A_3 x^3, \quad (12)$$

que es tan simple como para resolverse manualmente. Sustituyendo la (12) en la (6) y ésta en las (8) resultan:

$$\begin{aligned}
 A_1 + A_3(L/2)^2 &= B(A_1(L/2)^2/3 + A_3(L/2)^4/5) \\
 A_1 + 9A_3(L/2)^2/5 &= B(A_1(L/2)^2/5 + A_3(L/2)^4/7)
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Luego los autovalores y sus respectivos autovectores y frecuencias naturales, estas últimas obtenidas de $f = \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{EB}{r}}$, son:

$$\begin{aligned}
 A_{11} = -00732, \quad A_{31} = 1, \quad B_1 = 96.44 &\Rightarrow f_1 = 7852Hz \\
 A_{12} = -00146, \quad A_{32} = 1, \quad B_2 = 1661 &\Rightarrow f_2 = 32592Hz
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

b') Limitando el cálculo a $n=5$ y por tanto a dos coeficientes y aplicando la metodología descrita en b para la barra antedicha, resulta

$$\begin{aligned}
 A_{11} = -2234, \quad A_{51} = 1, \quad B_1 = 96.38 &\Rightarrow f_1 = 7850Hz \\
 A_{12} = -68.10, \quad A_{52} = 1, \quad B_2 = 904.2 &\Rightarrow f_2 = 24044Hz
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

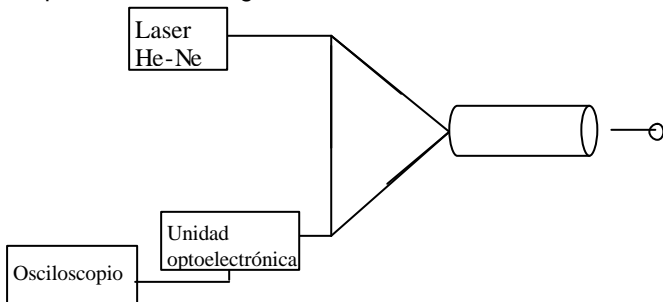
c') Según la teoría elemental de barras esbeltas, las frecuencias más bajas de los modos simétricos deben ser

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{E}{r}} \Rightarrow f_1 = 7850Hz \\
 & \qquad \qquad \qquad f_2 = 23550Hz
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

EXPERIMENTO

La barra antedicha se sitúa horizontal, apoyada sobre una goma pequeña. Sobre uno de sus extremos se aplica una percusión axial, mediante un pequeña bola de acero suspendida de un hilo a modo de péndulo. Con ello la barra entra en vibración longitudinal y con un amortiguamiento despreciable. La barra queda después del golpe en vibración prácticamente libre.

La detección del movimiento se efectúa en el extremo opuesto mediante interferometría de speckle, por tanto sin masa añadida. El interferómetro⁴ es capaz de detectar tanto el desplazamiento longitudinal como el transversal, pero en el experimento efectuado sólo se ha detectado el longitudinal. La luz de un generador láser de He-Ne se parte en dos haces, como se esquematiza en la figura, uno incide oblicuamente en la base rugosa a observar y la luz dispersada



en la dirección simétrica de la incidente se mezcla posteriormente con el otro haz, de una frecuencia ligeramente menor. La señal resultante se demodula en fase para obtener una señal proporcional a la componente normal del desplazamiento del punto de incidencia, que se registra en un osciloscopio digital. La FFT de la señal muestra unos máximos coincidentes con las frecuencias naturales de

vibración longitudinal. Las dos primeras frecuencias simétricas detectadas son:

$$7763 \text{ Hz y } 23291 \text{ Hz} . \tag{17}$$

La sensibilidad en frecuencia del dispositivo es 25 Hz.

COMPARACIÓN DE RESULTADOS

Es sabido que los resultados obtenidos por el método variacional aproximado siempre suministra unos valores para las frecuencias mayores que los valores exactos. Comparando las frecuencias obtenidas en el apartado *a* y en el apartado *b* resulta que la primera frecuencia más baja es aproximadamente igual para ambos métodos. Sin embargo, la segunda frecuencia obtenida por el método *b* es mucho menor y por tanto mucho mejor que la obtenida por el método *a*. Como el número de coeficientes a determinar en ambos casos es igual a dos y por consiguiente el tiempo de cálculo es similar en ambos, deducimos que con dos coeficientes es conveniente tener en cuenta la condición de contorno de las tensiones nulas en los extremos.

Al comparar el resultado *b* con el obtenido por aplicación de la teoría elemental, método *c*, se observa que esta es mejor para la barra esbelta considerada. Además la teoría elemental suministra todo el espectro de frecuencias, que son múltiplos impares de la frecuencia primera, para los modos simétricos, y cuyos autovalores son funciones armónicas de la coordenada *x*.

Si se comparan los resultados de la teoría elemental con los obtenidos en el laboratorio, se aprecia una diferencia del orden del 1.1% tanto para f_1 como para f_2 . Por tanto también esta teoría elemental es bastante exacta para nuestra barra muy esbelta.

LÍMITES DE CÁLCULO

Los cálculos manuales descritos en los apartados *a'* y *b'* del apartado anterior se han continuado con un PC. Ello permite aumentar el número de coeficientes y por tanto la precisión del cálculo numérico.

a'') En la serie de potencias propuesta como solución aproximada se ha llegado hasta el exponente máximo $l=11$. Las dos primeras frecuencias resultantes del cálculo son:

$$7850 \text{ Hz y } 23550 \text{ Hz} \quad (18)$$

Se ha continuado aumentando el exponente, comprobando que el resultado permanece estacionario hasta la décima de Hz en cualquiera de las dos frecuencias.

b'') En el método de aplicar las condiciones de contorno ha bastado un exponente igual al *a''* anterior, y por tanto un número de coeficientes inferior en una unidad al anterior, para que el resultado sea igual hasta la décima de Hz.

Esta igualdad de resultados es razonable teniendo en cuenta que el método variacional conduce a la mejor solución con el aumento del número de términos añadidos a la serie.

Los resultados (18) con un número de términos suficiente en la serie, tiende al resultado de la teoría elemental.

La comparación de los resultados de ambos métodos *a'* y *b'* con los resultados experimentales demuestra que hay diferencias, diferencias que aumentan con la frecuencia. Otro tanto sucede con las series de muchos términos. La conclusión es que las series adoptadas son incorrectas. Igual acontece con la teoría elemental. La razón principal es que la barra no es un objeto unidimensional sino tridimensional. Por tanto, aún limitándonos al estudio de desplazamientos con simetría axial y simétricos respecto del plano medio transversal, debemos considerar la coexistencia de componentes del desplazamiento axiales y radiales.

BIBLIOGRAFÍA

- 1.- I. S. Sokolnikoff, *Mathemal theory of elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1956, p. 81.
- 2.- A. Sanmartín, *Curso de elasticidad*, Ed. Bellisco, Madrid, 1990, p. 100.
- 3.- J. E. Marsden and T. J. R. Hughes, *Mathematical foundations of elasticity*, Dover Pu., New York, 1993, p. 250.
- 4.- F. J. Nieves, F. Gascón and A. Bayón, "Estimation of the elastic constants of a cylinder with a length equal to its diameter", *J. Acoust. Soc. Am.* **104**, 1998, pp. 176-180.