TECNIACUSTICA
BARCELONA • 1996

Afinación de pianos asistida por ordenador. Optimización por medio de la matriz pseudoinversa

Joaquim Agulló (1) y Harold Roth (2)

(1) Dep. De Ingeniería Mecánica. Universitat Politècnica de Catalunya
(2) Universität Karlsruhe (T.H.) Alemania.

RESUMEN
La afinación de pianos es un problema sin solución exacta a causa de la inarmonicidad de las frecuencias propias de las cuerdas. En la afinación de un intervalo juega un papel más destacado la frecuencia de los batimientos -entre parciales casi unísonos-, que la propia relación de frecuencias fundamentales. Aunque el problema ha sido estudiado por diversos investigadores en las últimas décadas, la búsqueda de una solución satisfactoria se ha llevado a cabo por medio de tanteos. La presente ponencia formula el problema por medio de un sistema de ecuaciones algébricas sobredeterminado -en el que las incógnitas son las alteraciones a introducir en la afinación de las cuerdas- y al que se busca la solución que minimiza la norma, con matriz métrica adecuada, de las frecuencias de los batimientos críticos en la afinación. Esta solución se determina por medio de la matriz pseudoinversa. La elección de la matriz métrica permite personalizar la afinación.

INTRODUCCIÓN
La afinación del piano es problemática porqué pretende establecer un temperamento único entre notas con parciales (o componentes frecuenciales) no estrictamente armónicas. Debido a ello, cuando suenan dos notas con un determinado intervalo, son inevitables los batimientos entre parciales casi unísonos. La afinación del intervalo busca un compromiso que minimice la percepción de los batimientos molestos por su frecuencia, intensidad y duración. La dificultad no es la misma a lo largo de la tesitura del piano. En las notas más agudas no se producen batimientos a causa de la práctica ausencia de parciales, mientras que en las más graves, el poseer un elevado número de parciales, diversos batimientos pueden condicionar la afinación.

En el proceso de afinación se elige arbitrariamente la afinación de una nota (suele elegirse el La_4=*440 Hz*) y a partir de ella las restantes se afinan intentando un compromiso global satisfactorio relativo a la percepción de batimientos. La frecuencia de cada batimiento relevante en la afinación depende linealmente de la corrección introducida en las dos notas implicadas. Con ello el problema de la afinación asistida mediante ordenador conduce a un sistema lineal de ecuaciones con tantas ecuaciones como batimientos relevantes se consideren y en el que las incógnitas son las correcciones introducidas en las notas. Para un piano de 88 notas, el número de incógnitas es 87 mientras que el de parciales relevantes puede ser de diversos centenares. Así pues el sistema lineal de ecuaciones es *sobredeterminado* y por consiguiente carente de solución exacta, la *matriz pseudoinversa* resuelve el problema determinando la solución que minimiza la norma del vector diferencias entre los batimientos resultantes y los valores de referencia elegidos como deseables, y permite personalizar la afinación por medio de la matriz métrica.

El método que se presenta es un avance significativo en la afinación asistida. Hasta el presente se ha pretendido emular el método tradicional: división de la octava central y su traslado por octavas hacia los registros grave y agudo. Agulló-Sau (1997) traslada en intervalos de octava por parciales unísonos una octava central previamente definida, Lattard (1993) divide la octava central a partir de las ecuaciones de los batimientos que resuelve por tanteo.

FORMULACIÓN ANALÍTICA DE LA AFINACIÓN
La frecuencia del parcial p de la nota N, cuyo primer parcial tiene la frecuencia f_{1M}, puede expresarse en la forma

$$f_p = pf_{1M} + I_{pM} \qquad (1)$$

donde I_{pM} es la inarmonicidad. Si a partir de unos valores iniciales f^0_{1M} y I^0_{pM}, la frecuencia del primer parcial se incrementa en $\delta_M f^0_{1M}$, la inarmonicidad decrece (de acuerdo con la teoria de las cuerdas tensadas con rigidez transversal, [Morse, 1948]) tomando el valor

$$I_{pM} = (1 - \delta) I^0_{pM} \ , \ \text{para } f_{1M} = (1 + \delta) f_{1M} \quad (2)$$

Para dos notas M y N con un intervalo p/q>1 entre ellas, la frecuencia β^{pq}_{MN} entre el parcial p de M y q de N cuando los primeros parciales de M y N se incrementan en $\delta_M f^0_{1M}$ y $\delta_N f^0_{1N}$, respectivamente, pueden expresarse, de acuerdo con las Ecs. (1), (2) en la forma.

$$\beta^{pq}_{MN} = p(1 + \delta_M) f^0_{1M} + (1 - \delta_M) I^0_{pM} - q(1 + \delta_N) f^0_{1N} - (1 - \delta_N) I^0_{qN} \quad (3)$$

Esta ecuación puede reescribirse como ecuación lineal en las incógnitas ∂M y ∂N con las que se pretende obtener un cierto valor β^{pq*}_{MN} de β^{pq}_{MN}.

$$(pf^0_{1M} - I^0_{pM})\delta_M - (qf^0_{1N} - I^0_{qN})\delta_N = - pf^0_{1M} + qf^0_{1N} - I^0_{pM} + I^0_{qN} + \beta^{pq*}_{MN} \quad (4)$$

Para cada batimiento relevante puede escribirse la correspondiente Ec. (4). Cuando una de las dos notas es la nota L que se afina de forma arbitraria (La_4=440 Hz), su valor δ_L es un dato de modo que el término correspondiente pasa al segundo miembro. Para un mismo intervalo p/q entre las notas M y N pueden ser relevantes los batimientos entre los parciales kp de M y kq de N con k = 1, 2, ..., para cada uno de los cuáles podría escribirse la correspondiente Ec. (4).

SOLUCIÓN ÓPTIMA

El sistema de ecuaciones (4) para todos los batimientos relevantes es un sistema lineal sobredeterminado en las incógnitas ∂_i, con i=1, 2, ... número de teclas -1. En notación matricial

$$[A]\{\delta\} = \{\alpha\}, \text{con } \{\alpha\} \equiv \{\gamma\} + \{\beta^*\} \quad (5)$$

La solución óptima definida por la matriz pseudoinversa

$$\{\delta_{op}\} = [A]^I \{\alpha\}, [A]^I = (A^T GA)^{-1} A^T G \quad (6)$$

minimiza la norma del error

$$[A]\{\delta_{op}\} - \{\alpha\} \equiv \{\beta\} - \{\beta^*\} \quad (7)$$

calculada con la matriz métrica G, simétrica y definida positiva, que puede elegirse arbitrariamente. En el problema estudiado solo tienen interés las matrices [G] diagonalizadas, de elementos g_j, y en consecuencia su utilización puede substituirse por la multiplicación de las ecuaciones por el correspondiente factor de ponderación $\sqrt{g_j}$.

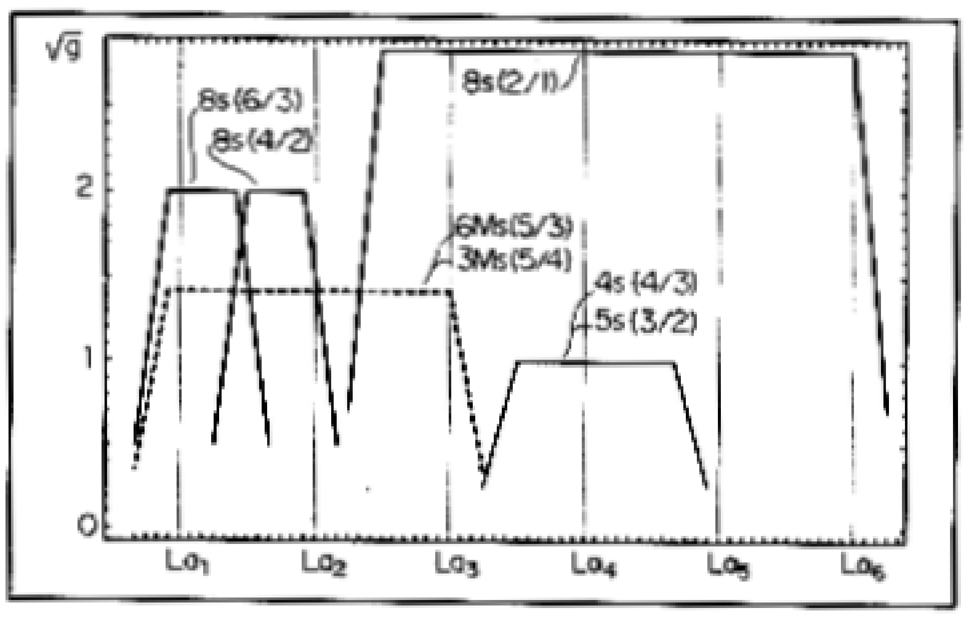

Figura 1

El proceso analítico parte de la información objetiva de los valores experimentales f^0_{1M} y $I^0_{pM} \equiv f^0_{pM} - pf^0_{1M}$ para todas las notas y de la elección de los vectores $\{\sqrt{g}\}$, $\{\beta^*\}$ de los factores de ponderación y de las frecuencias de batimiento deseadas. La elección $\{\beta^*\}$ de puede ser reconsiderada a la vista de los batimientos $\{\beta\}$ resultantes y dar lugar a reiteraciones del proceso. Los valores $\sqrt{g_j}$, que permiten ponderar más unos batimientos que otros, ofrecen un margen para la personalización de la afinación.

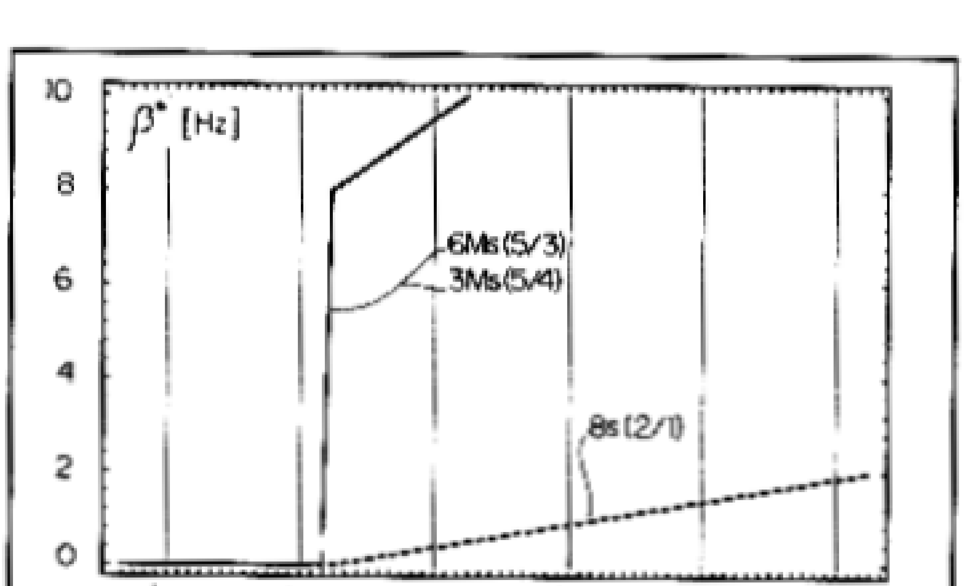

Figura 2

CASO DE APLICACIÓN

Se ha tomado como caso de aplicación el piano de la sala de Actos de la ETSEIB por disponerse de abundante documentación de su comportamiento vibroacústico. Esta información ha permitido ele-

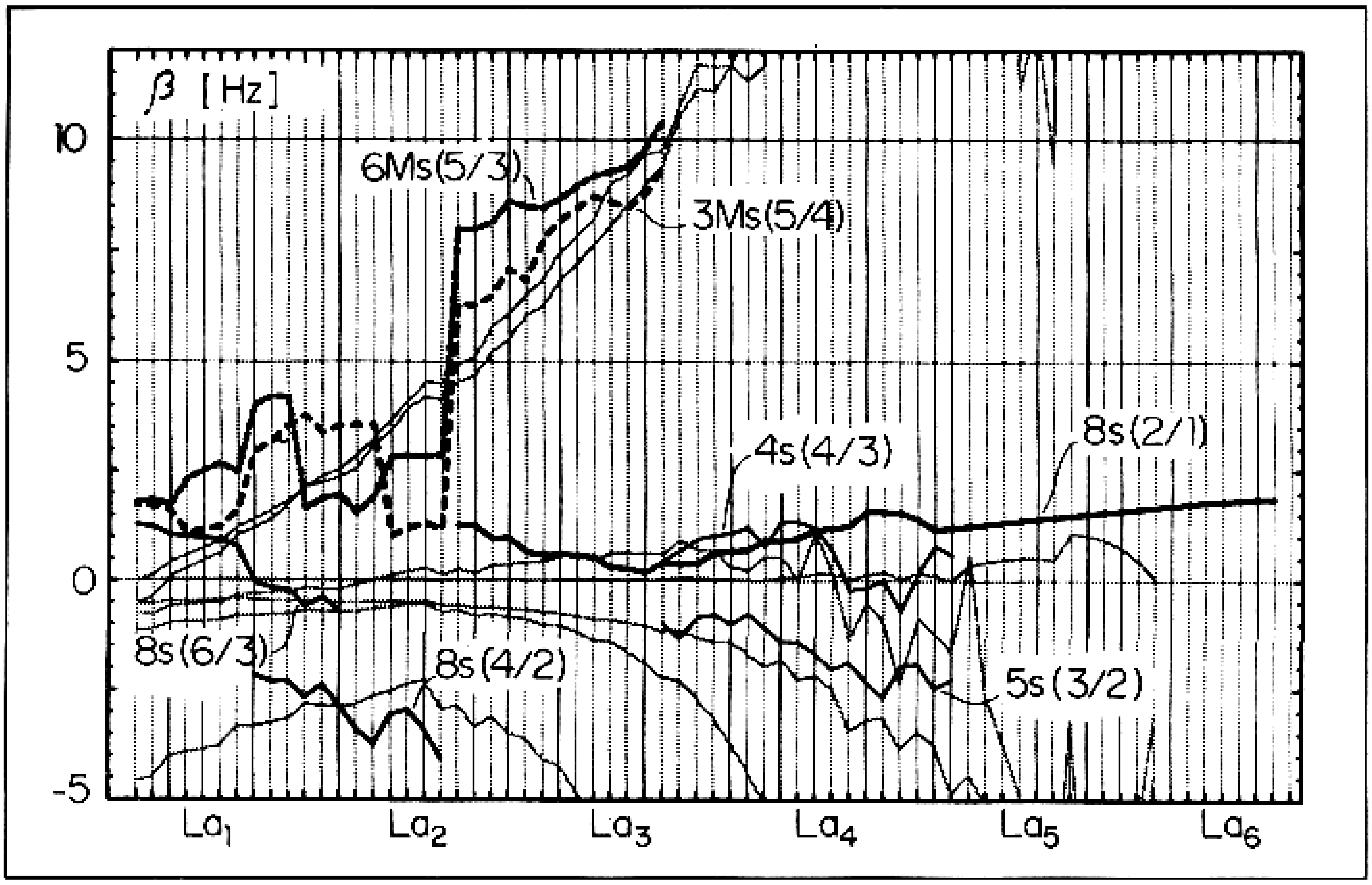

Figura 3

gir los factores de ponderación $\sqrt{gj}$ mostrados en la Fig.1. Para las inarmonicidades se ha empleado la teoría de las cuerdas tensadas con rigidez transversal, que ha conducido a la elección de los valores mostrados β_j^* en la Fig.2 y a las ecuaciones que condicionan la afinación.

En la Fig. 3 se muestran los valores (resultantes. Estos resultados muestran la capacidad del método para dirigir acertadamente el proceso de afinación.

CONCLUSIONES

El método presentado, de afinación asistida por ordenador conduce a una afinación óptima dirigida por unos criterios generales -elección de $\{\sqrt{g}\}$ y $\{\beta^*\}$ - directamente relacionados con aspectos valorados por el pianista, lo cual facilita la intervención de este en el proceso y la obtención de afinaciones personalizadas.

REFERENCIAS

Agulló, J. Y Sau, SA. (1977) *"On instrument aided piano tuning" 9th International Congress on Acoustics. Madrid. Resumen en Vol.II pp.* 803. Ponencia de 12 pp, aparte.

Lattard, J. (1993) *"Influence of inharmonicity on the tuning of a piano -Measurements and Mathematical simulation" J. Acoust. Soc. Am. 94*(1), pp. 46-53.

Morse, P. M. (1948) *Vibration and Sound* McGraw-Hill, pp.166-170.