

Elemento de contorno axisimétrico para el cálculo de la función de reflexión de los pabellones

Joaquim Agulló, Ana Barjau

*Departament d'Enginyeria Mecànica. E.T.S.E.I.B.,
Universitat Politècnica de Catalunya.*

RESUMEN

La función de reflexión de los pabellones es necesaria en la modelización de los instrumentos musicales de viento en el dominio temporal. Su cálculo directo en dicho dominio es preferible al cálculo indirecto a partir del dominio frecuencial debido a la relación desfavorable de su amplitud respecto a la de las reflexiones del extremo (abierto o cerrado). Para realizar este cálculo, la ecuación de Webster es una aproximación usualmente insuficiente. Una vía prometedora es la nueva ecuación de onda emprendida por Keefe et al. Otra opción es la del cálculo numérico por medio de elementos finitos o elementos de contorno. Estos últimos resultan más atractivos por requerir un número significativamente inferior de elementos. La simetría axial del problema acústico debe permitir reducir drásticamente el número de elementos empleando elementos anulares. No obstante, los programas comerciales existentes no incluyen esta posibilidad. Esta ponencia presenta el desarrollo de un elemento de contorno anular que permite el cálculo en el dominio temporal del campo acústico en el interior del pabellón con una discretización limitada a su perfil.

INTRODUCCIÓN

La simulación de los instrumentos musicales de viento, que en la última década se ha desplazado al dominio temporal a causa de su no linealidad, requiere el conocimiento de la función de reflexión de los pabellones. Tradicionalmente el estudio de los pabellones, descritos como guías onda axisimétricas, se ha desarrollado en el dominio frecuencial, y en principio es posible obtener la función de reflexión a partir de caracterizaciones frecuenciales. No obstante, es preferible su cálculo directo en el dominio temporal debido a la relación desfavorable de su amplitud respecto a la de las reflexiones de extremo (sea abierto o cerrado).

La utilización de formulaciones específicas de la ecuación de onda para guías onda axisimétricas no es todavía un recurso satisfactorio: la ecuación de Webster es una aproximación usualmente insuficiente, y la nueva ecuación de onda uniparamétrica en fase de desarrollo por Keefe et al. [Keefe, 1990] aún no es operativa.

La alternativa razonable es la proporcionada por los métodos de discretización mediante elementos finitos o elementos de contorno. Estos últimos son más atractivos porque facilitan el tratamiento de la condición de extremo, si éste es abierto, y por requerir un número significativamente menor de elementos.

La simetría axial del problema acústico implicado permite reducir drásticamente el número de elementos empleando elementos anulares. Con ello se pasa de un problema de contorno superficial a un problema de contorno lineal. Esta posibilidad, que es usual encontrar en los programas comerciales de elementos finitos, no existe en los programas comerciales de elementos de contorno ni se encuentra desarrollada en la bibliografía, donde la formulación axisimétrica se limita al caso de la ecuación de Laplace y al caso de la elastoestática, pero no a la ecuación de onda o a la ecuación de Helmholtz [Brebbia, 1992].

Esta ponencia presenta el desarrollo de un elemento de contorno anular que permite el cálculo en el dominio temporal del campo acústico en el interior de un pabellón con una discretización limitada a su perfil y al perfil de las superficies axisimétricas que cierran sus dos extremos.

FORMULACIÓN AXISIMÉTRICA DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO EN EL DOMINIO TEMPORAL

La propagación de ondas en un fluido compresible no viscoso está gobernada por la ecuación lineal de onda:

$$\Delta\phi - (1/c^2)(\partial\phi/\partial t^2) = -\gamma \quad (1)$$

donde ϕ es el potencial de velocidad, c la velocidad del sonido en el medio, t el tiempo y γ las fuentes acústicas, función de posición y del tiempo.

La función de Green para la Ec. (1), en el espacio de tres dimensiones, tiene la forma:

$$g(P_1, P, t) = (1/4\pi\rho)\delta(\rho - ct); \rho = |P_1P|; \delta = \text{distribución delta de Dirac} \quad (2)$$

y describe el resultado de aplicar un impulso en el punto P_1 en el instante $t = 0$.

La integración de la Ec. (1) mediante el método de los elementos de contorno pasa por su producto por la solución elemental, Ec. (2), e integración por partes con respecto al espacio y al tiempo. Este proceso conduce a la fórmula de Kirchhoff:

$$\alpha_1\phi(P_1, t) = \int_S [g(P_1, P, t)*(\partial\phi(P, t)/\partial n) - \phi(P, t)*(\partial g(P_1, P, t)/\partial n)]dS \quad (3)$$

donde S es la superficie que encierra el dominio Ω , P es un punto genérico sobre la superficie mientras que P_1 es un punto ya sea interior (y en tal caso $\alpha = 4\pi$) o sobre la superficie (y en tal caso $\alpha = \text{ángulo sólido interior abarcado por la aproximación tangente de la superficie en } P_1$).

En problemas axisimétricos, la integración con respecto a la coordenada angular de rotación conduce a la reducción a un problema de contorno lineal. Así, en términos de las coordenadas polares (r, θ, z) definidas en la fig. 1, la Ec. (3) para un punto P_j de la superficie S adopta la forma:

$$\begin{aligned} \alpha_j\phi(P_j, t) &\equiv \int_r \frac{\partial\phi(P, t)}{\partial n} * \left(\int_0^{2\pi} g(P_j, P, t)d\theta \right) rd\Gamma - \int_r \phi(P, t) * \left(\int_0^{2\pi} \frac{\partial g(P_j, P, t)}{\partial n} d\theta \right) rd\Gamma \equiv \\ &\equiv \int_r \frac{\partial\phi}{\partial n} * \tilde{g}_j rd\Gamma - \int_r \phi * \frac{\partial\tilde{g}_j}{\partial n} rd\Gamma \end{aligned} \quad (4)$$

donde Γ es un perfil del conjunto axisimétrico. La integración circular de g y $\partial g/\partial n$ conduce a la solución fundamental \tilde{g} para una fuente anular situada en la sección correspondiente a P_j y a su derivada normal $\partial\tilde{g}/\partial n$:

$$\tilde{g}_j(z, r, t) = \frac{1}{\pi} \frac{c}{\sqrt{(c^2t^2 - \rho_{j,\min}^2)(\rho_{j,\max}^2 - c^2t^2)}} \epsilon(ct - \rho_{j,\min})\epsilon(ct - \rho_{j,\max}),$$

situada en (z_j, r_j)

$$\rho_{j,\min}^2 = (r - r_j)^2 + (z - z_j)^2, \rho_{j,\max}^2 = (r + r_j)^2 + (z - z_j)^2$$

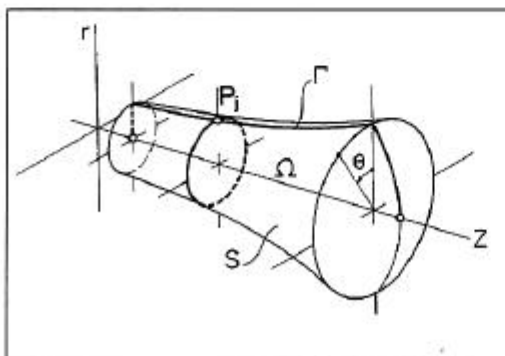


Figura 1

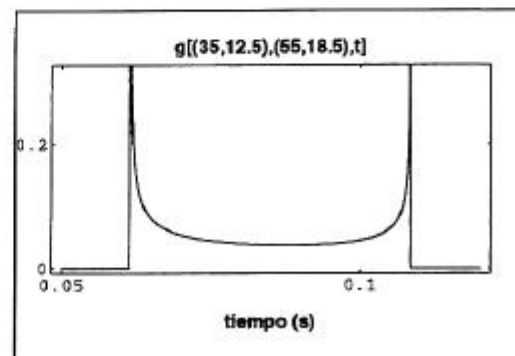


Figura 2

En la figura 2 se representa $\tilde{g}_j(z_i, r_i, t)$ para una fuente anular con $z_j = 35$ y $r_j = 12.5$, en el punto de coordenadas $z_i = 55$ y $r_i = 18.5$.

Para $\tilde{g} / \partial n$ correspondiente a una superficie de perfil $\mathfrak{R}(z)$ se obtiene la expresión:

$$\frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial n} = \left[\frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial z} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial r} \right] \cos \theta; \quad \theta = \arctg \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial z}, \text{ con}$$

$$\frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial z} = \frac{2(z-z_j)[\mathfrak{R}^2 + (z-z_j)^2 + r_j^2 - c^2 t^2]}{(c^2 t^2 - \rho_{j,\min}^2)^{3/2} (\rho_{j,\max}^2 - c^2 t^2)^{3/2}} \epsilon(ct - \rho_{j,\min}) \epsilon(ct - \rho_{j,\max}) +$$

$$+ \frac{1}{(c^2 t^2 - \rho_{j,\min}^2)^{1/2} (\rho_{j,\max}^2 - c^2 t^2)^{1/2}} \left[-\frac{z-z_j}{\rho_{j,\min}} \delta(ct - \rho_{j,\min}) + \frac{z-z_j}{\rho_{j,\max}} \delta(ct - \rho_{j,\max}) \right]$$

$$\frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial r} = \frac{2\mathfrak{R}[\mathfrak{R}^2 + (z-z_j)^2 - r_j^2 - c^2 t^2]}{(c^2 t^2 - \rho_{j,\min}^2)^{3/2} (\rho_{j,\max}^2 - c^2 t^2)^{3/2}} \epsilon(ct - \rho_{j,\min}) \epsilon(ct - \rho_{j,\max}) +$$

$$+ \frac{1}{(c^2 t^2 - \rho_{j,\min}^2)^{1/2} (\rho_{j,\max}^2 - c^2 t^2)^{1/2}} \left[-\frac{\mathfrak{R} - r_j}{c \rho_{j,\min}} \delta(ct - \rho_{j,\min}) - \frac{\mathfrak{R} + r_j}{\rho_{j,\max}} \delta(ct - \rho_{j,\max}) \right]$$

En la figura 3 se muestran $\partial \tilde{g}_j / \partial z$, $\partial \tilde{g}_j / \partial r$, y $\partial \tilde{g}_j / \partial n$ para la misma fuente y punto que la figura 2 considerando una superficie de pendiente $\partial \mathfrak{R} / \partial z = 0.3$.

De acuerdo con el método de los elementos de contorno, se discretiza el perfil Γ en N elementos. Si se considera ϕ uniforme sobre cada elemento, para cada uno de ellos la Ec. (4) se expresa como suma de N términos lineales en los valores de ϕ o $\partial \phi / \partial n$, con N valores incógnita, cuyos coeficientes son integrales de superficie de $\partial \tilde{g} / \partial n$ y \tilde{g} respectivamente. Este sistema lineal de N ecuaciones permite determinar las N incógnitas.

CONCLUSIONES

Se han presentado las expresiones analíticas de la función de Green y de su derivada normal para una fuente anular y se han aplicado a la formulación de un elemento de contorno axisimétrico que permite reducir los problemas acústicos axisimétricos, como el del cálculo de la función de reflexión de los pabellones, a un problema de contorno lineal. La discretización se limita a la del perfil del pabellón con sus superficies externas.

BIBLIOGRAFIA

Brebbia, C. A.; Domínguez J. (1992) "Boundary elements. An introductory Course", Computational Mechanics Publications, McGraw-Hill.

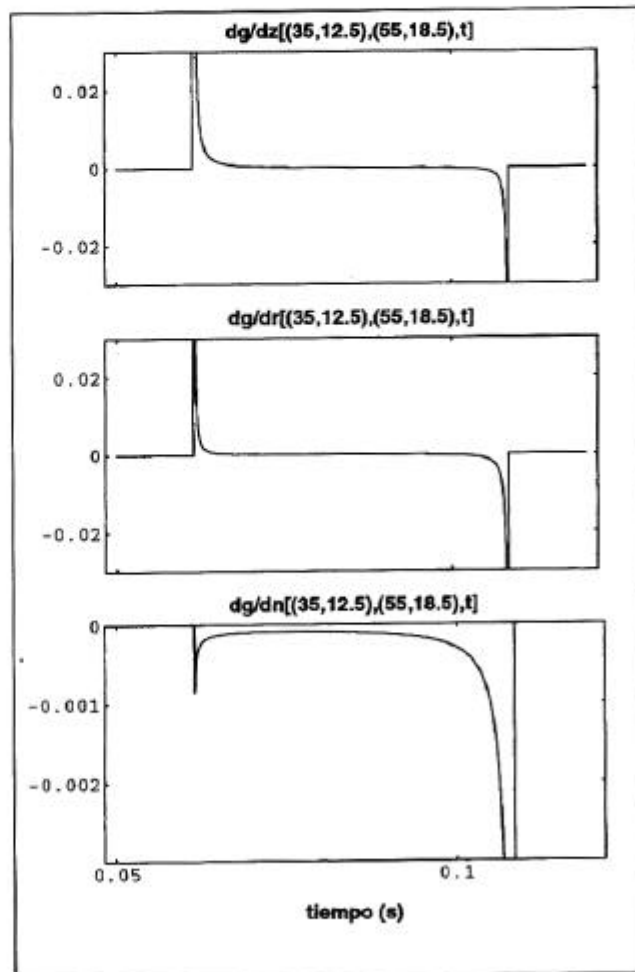


Figura 3. Factor de reducción recomendado: 0.81.

Keefe, D. H.; Barjau, A.; Agulló, J. (1993) "Theory of wave propagation in axisymmetric horns", SMAC'93, Proc. of the Stockholm Music Acoustics Conference, Royal Swedish Academy of Music, 79, 496-500.